

BIBLIOTHÈQUE INTERNATIONALE D'ÉCONOMIE POLITIQUE

Publiée sous la direction de Alfred Bonnet

DEPOT L. G. B.  
1917  
44

# Recherches Mathématiques

## SUR LA THÉORIE

DE

# LA VALEUR ET DES PRIX



PAR

**IRVING FISHER**

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE

PROFESSEUR D'ÉCONOMIE POLITIQUE A L'UNIVERSITÉ YALE

TRADUIT DE L'ANGLAIS

PAR

**Jacques MORET**

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS CIVILES  
LICENCIÉ EN SCIENCES, DOCTEUR EN DROIT



PARIS (V<sup>e</sup>)

**M. GIARD & E. BRIÈRE**

LIBRAIRES-ÉDITEURS

16 RUE SOUFFLOT, ET 12, RUE TOULLIER

1917

## PRÉFACE DE L'AUTEUR A L'ÉDITION FRANÇAISE

---

*Depuis la publication, il y a vingt-quatre ans, des Recherches mathématiques sur la théorie de la valeur et des prix, nombre des idées qui y sont exposées ont été acceptées d'une manière générale, cependant que d'autres sont, je l'espère, en voie de l'être.*

*Les idées principales du livre peuvent être groupées sous quatre chefs, comme suit :*

- (1) L'utilité des mathématiques en économique ;*
- (2) L'utilité des rapprochements avec la physique et des modèles hydrostatiques ;*
- (3) L'étude de l'utilité en tant que quantité mesurable ; et*
- (4) L'interdépendance des utilités dans diverses conjonctures spécifiques, comme celle où deux sortes de biens sont mutuellement « complémentaires » ou « concurrentes ».*

*J'ai eu la grande satisfaction de constater que l'hostilité contre l'emploi des mathématiques en économique a, pour la plus large part, disparu, bien que, malheureusement, il soit encore vrai que peu d'étudiants fassent entrer les mathématiques dans la préparation de leurs travaux de recherches économiques. Nous pâtissons encore en économique du fait que beaucoup de gens qui ont abordé cette science par le côté historique ne trouvent d'intérêt qu'aux faits en eux-mêmes et non à leur analyse ou à leur*

*interprétation. Cela est presque aussi fâcheux que l'état de choses inverse, qui se produit lorsque des théoriciens en économie n'attachent pas d'importance à la vérification de leurs conclusions par un appel aux faits. Nous progresserons davantage le jour où tout à la fois les économistes « théoriciens » apprendront à être plus pratiques et les économistes « praticiens » plus théoriques.*

*Il a été fait de nouveau appel à des modèles physiques hydrostatiques établis d'après ceux de ce livre dans diverses études économiques, parmi lesquelles nous pouvons mentionner celles de M. Enrico Barone (« A proposito delle indagini del Fisher », Giornale degli Economisti, 2<sup>e</sup> série, Maggio 1894, p. 28) et du Professeur F.-Y. Edgeworth (The Economic Journal, September 1895, p. 434).*

*Les problèmes de la mesurabilité et du mesurage de « l'utilité » et de l'interdépendance des utilités ont attiré l'attention de divers chercheurs, mais on ne peut dire jusqu'à présent qu'ils aient reçu des solutions satisfaisantes. J'espère essayer bientôt de contribuer à la solution du premier de ces problèmes.*

*La publication de cette édition française me donne une grande satisfaction, et je serais encore plus heureux si elle pouvait provoquer l'apport de nouvelles contributions à l'étude des sujets traités.*

IRVING FISHER.

Yale University.  
New-Haven, Conn. Etats-Unis.

Mars 1916.

---

## PRÉFACE

---

John Stuart Mill (1) assura qu'il n'avait laissé à un économiste à venir aucun point à éclaircir dans les lois de la valeur. Jusqu'en 1871 cette assertion eut sans doute à peu près la force d'un dogme. Jevons lui-même lui fit une soumission préliminaire avant d'entreprendre d'en détruire la base avec l'instrument mathématique. Jevons, avec une franchise caractéristique, finit par la rejeter expressément (2) ; mais peu de ses successeurs ont compris avec sa clarté et sa probité le besoin d'une étude plus approfondie dans le sens qu'il indiqua.

La vérité est que la plupart des gens, sans en excepter les économistes de profession, se montrent satisfaits avec des notions fort brumeuses. Combien peu d'élèves du type littéraire ou historique retiennent de leur étude de la mécanique une notion de la force qui soit adéquate ! L'expérience musculaire en offre une conception concrète et pratique, mais ne donne aucune idée de la dépendance compliquée de l'espace, du temps et de la masse. Une patiente étude mathématique peut seule le faire. Cette aversion naturelle pour une étude minutieuse et compliquée se rencontre en Economique et en particu-

(1) *Pol. Econ.*, liv. III, ch. 1, § 1.

(2) *Pol. Econ.*, Préf. de la 2<sup>e</sup> éd.

lier dans la théorie de la valeur. Les fondements mêmes du sujet réclament une nouvelle étude et une nouvelle base. Les relations de la valeur avec l'utilité, la désutilité et la quantité d'un bien, l'égalité de deux utilités, le rapport de deux utilités, l'utilité d'un bien en tant que fonction de la quantité de ce bien seul ou de ce bien et des autres conjointement sont des questions que l'on ne peut négliger sans laisser la valeur à moitié incomprise, et dont le savant s'occupant d'économie doit, par conséquent, faire porter sa pensée et ses plus patients efforts à se rendre maître.

Ces questions font l'objet du mémoire suivant, qui est *une étude par la méthode mathématique de la détermination de la valeur et des prix*.

De nombreuses considérations connexes au sujet ont été laissées de côté comme ayant déjà été développées par d'autres. Presque à chaque pas des cas de discontinuité viennent modifier ou étendre le cas de continuité. Mais l'application des corrections qui en résultent a été entièrement mise au point par Auspitz et Lieben. L'équilibre multiple et la valeur de monopole ont été laissés de côté pour une raison similaire.

Les deux livres qui ont exercé le plus d'influence sur moi sont Jevons : *Theory of Political Economy* (1) et Auspitz et Lieben : *Untersuchungen über die Theorie des Preises* (2). Au premier je dois l'idée de l'utilité marginale et du traitement mathématique en général, au dernier la claire conception de la « symétrie » de l'offre et de la demande, et aux deux nombre d'éléments de moindre importance.

Les équations du chapitre IV, § 10, furent trouvées par

(1) Trad. franç., par H. E. Barrault et M. Alfassa, Paris, 1909. (Note du traduct.)

(2) Trad. franç., par L. Suret, Paris, 1914. (Note du traduct.)

moi il y a deux ans alors que je n'avais lu aucun économiste mathématicien, sauf Jevons. Elles constituent une extension naturelle de la détermination due à Jevons de l'échange de *deux* biens entre *deux* groupes de trafiquants à l'échange d'un *nombre quelconque* de biens entre un *nombre quelconque* de trafiquants, et furent obtenues comme interprétation du mécanisme que j'ai décrit au chapitre I. En d'autres termes, elles furent l'expression de la détermination du mécanisme en écrivant autant d'équations que d'inconnues. Ces équations sont essentiellement celles de Walras dans ses *Eléments d'économie politique pure*. Les seules différences essentielles consistent en ce que j'utilise l'utilité marginale d'un bout à l'autre du mémoire et que je la traite comme une fonction des quantités de biens, tandis que le Prof. Walras fait de la quantité de chaque bien une fonction des prix. Ce fait que des résultats similaires aient été obtenus séparément et par des voies différentes est un argument à faire entrer en ligne de compte par ceux qui se montrent sceptiques au sujet de la méthode mathématique. Il me parut préférable de ne pas laisser de côté ces parties analytiques de la Partie I, tout à la fois parce qu'elles contribuent à l'intelligence des autres parties de l'ouvrage et qu'au fond elles sont mon œuvre.

Trois jours après que la Partie II fut terminée, je reçus et vis pour la première fois les *Mathematical Psychics* du Prof. Edgeworth. Je constatai avec un grand intérêt une ressemblance entre sa surface de la page 21 et les surfaces d'utilité totale (1) que j'avais décrites. La

(1) Son résultat qui, transcrit dans mes notations, est :

$$\left(\frac{dU}{dA_1}\right) \left(\frac{dU}{dB_2}\right) - \left(\frac{dU}{dB_1}\right) \left(\frac{dU}{dA_2}\right) = 0,$$

devient par transposition et division identique à une portion de la proportion continue de la Part. I, ch. IV, § 3.

ressemblance, toutefois, ne s'étend pas très loin. Elle consiste dans le fait de reconnaître que dans un échange l'utilité est une fonction des *deux* biens (non d'un seul, comme le supposait Jevons), dans l'emploi de la surface en question pour interpréter ce fait et dans la simple phrase (*Math. Psych.*, p. 28) « et de même pour de plus grands nombres dans l'hyperespace » qui présente des rapports avec la Partie II, ch. II, § 5.

Il y a un point cependant où, à ce qu'il me semble, l'auteur de ce livre vraiment fécond en idées s'est écarté loin du droit chemin. On a reproché aux économistes mathématiciens cette énigme : Qu'est-ce qu'une unité de plaisir ? Et Edgeworth, à la suite du psychologue-physiologiste Fechner, répond : « Les plus petites quantités de plaisir perceptibles sont assimilables » (p. 99). J'ai toujours pensé que l'utilité doit être susceptible d'une définition qui la rattache à ses rapports avec les biens positifs ou objectifs. Un physicien serait certainement dans l'erreur en définissant l'unité de force le minimum sensible de sensation musculaire. Le Prof. Edgeworth reconnaît son embarras : « Il faut avouer que nous abandonnons ici la *terra firma* de l'analogie avec la physique » (p. 99). Néanmoins il estime que c'est « un principe sur lequel nous tombons d'accord pour agir, mais dont il peut être difficile de donner une raison » et qu'en outre [une telle assimilation], « on la conteste, est, bien qu'on en puisse douter, appropriée à notre sujet ».

Cette introduction subreptice de la Psychologie dans l'Economie me semble *inappropriée* et *viciieuse*. D'autres que le Prof. Edgeworth y ont eu recours. Gossen (1) et Jevons parurent regarder le « Calcul du plaisir et de la peine (2) » comme une partie de la pro-

(1) *Menschlich. Verkehr.*, Braunschweig, 1854.

(2) Jevons, p. 23, également pp. 8-9.

fondeur de leur théorie. Ils ne virent indubitablement aucun moyen d'échapper à son usage. Il en est résulté que les « mathématiques » ont été accusées de « restaurer les entités métaphysiques précédemment rejetées (1) ».

Ce sont ces auteurs, avec Cournot (2), Menger (3) et Marshall (4), qui me semblent avoir apporté la plus grande contribution au sujet dont nous nous occupons. Sauf les exceptions indiquées, je me suis efforcé de ne pas répéter ce qu'ils ont écrit, mais d'y ajouter tout à la fois dans la substance de la théorie de notre sujet et dans le mode de représentation de cette théorie. Les lecteurs pour lesquels ce sujet est nouveau trouveront ce mémoire condensé à l'excès. En vue d'être bref, les emplois possibles des mécanismes et des graphiques n'ont été qu'esquissés, et des explications et illustrations détaillées ont été laissées de côté. J'ai admis que mes lecteurs sont déjà familiers avec (par exemple) Jevons, Walras, Menger ou Wieser qui offrent d'abondantes illustrations et explications relatives à « l'utilité finale ». De grandes portions de la Partie II et de l'Appendice I peuvent n'être pas entièrement intelligibles pour ceux qui ne sont pas familiers avec la haute analyse géométrique. Ces portions ont été rendues aussi brèves que possible.

Je dois des remerciements particuliers au Prof. Gibbs et au Prof. Newton pour leurs précieuses observations.

IRVING FISHER.

Yale University, mai 1892.

(1) Dr Ingram.

(2) *Théorie des richesses*, Paris, 1838.

(3) *Volkswirtschaftslehre*, Wien, 1871.

(4) *Prin. of Econ.*, Macmillan, 1890. (Trad. franç. par F. Sauvaire-Jourdan et S. Bouyssy, 2 vol., Paris, 1907 et 1909.)

## PREMIÈRE PARTIE

### L'UTILITÉ DE CHAQUE BIEN SUPPOSÉE NE DÉPENDRE QUE DE LA QUANTITÉ DE CE BIEN

---

#### CHAPITRE PREMIER

##### L'utilité en tant que quantité.

###### § 1

Les lois de l'économie sont imaginées pour expliquer les faits. Le concept d'utilité tire son origine des faits qui sont la manifestation des préférences ou des décisions humaines, tels que ceux que l'on observe dans la production, la consommation et l'échange des marchandises et des services.

Pour fixer l'idée d'utilité, l'économiste ne devrait pas aller plus loin qu'il n'y a intérêt à le faire pour expliquer les faits *économiques*. Ce n'est pas son affaire d'édifier une théorie de psychologie. Il n'a pas à prendre position aux côtés de ceux qui se chamaillent à prouver ou à dénier que seuls le plaisir et la peine déterminent notre manière d'agir. Ces disputeurs ont si bien déformé les idées de plaisir et de peine, que ceux qui les suivent, eux et leurs pétitions de principes, se trouvent eux-mêmes user des mots dans des sens forcés.

Jevons fait de utilité le synonyme de plaisir.

Cairnes (1) proteste contre cette manière de faire et soutient qu'elle conduit à une définition en cercle vicieux de la valeur. Ce n'est, toutefois, que dans les tout premiers principes que l'on rencontre ce cercle, qui vicie la psychologie et non l'économique ; le dernier dollar de sucre (nous dit-on) représente la même quantité de sensation agréable que le dernier dollar de dentisterie (dentistry). Cela peut être exact comme simple vue superficielle, mais il faut se garder de l'exposer comme une véritable « proposition synthétique » (2) ou de le rattacher à la mathématique des sensations (3), comme le fit Edgeworth (4).

Le point de contact entre la psychologie et l'économique est le *désir*. Il est difficile de se rendre compte du motif pour lequel tant de théoriciens s'appliquent à faire disparaître la distinction entre le plaisir et le désir (5). Personne n'a jamais nié que les actes économiques aient pour antécédent invariable le désir. Que l'antécédent du désir soit le « plaisir » ou que, indépendamment du plaisir, ce puisse parfois être le « devoir » ou la « crainte », c'est là un phénomène placé au second plan par rapport à l'acte économique consistant à faire un choix et qui est entièrement du domaine de la psychologie.

Nous nous contenterons donc, quant à nous, du simple postulat psycho-économique suivant :

*Chaque individu agit selon ses désirs.*

(1) *Pol. Econ.*, p. 21.

(2) KANT, *Critique Pure Reason*, Introduction.

(3) LAAD, *Physiological Psychology*, p. 361.

(4) Voir ci-dessus (Préface).

(5) Voir SIDGWICK, *Methods of Ethics*, ch. IV.

## § 2

Le sens dans lequel il faut entendre que l'utilité est une quantité est déterminé par trois définitions :

(1) Pour un *individu donné* à un *instant donné*, l'utilité de A unités d'une marchandise ou d'un service (*a*) est égale à l'utilité de B unités d'une autre marchandise ou d'un autre service (*b*), si l'individu ne ressent *aucun désir* pour A à l'exclusion de B ou inversement.

A et B représentent ici des nombres. Ainsi, si le premier produit est le sucre et le second le calicot, et si l'individu apprécie 2 livres de sucre autant que 10 yards de calicot, A est 2 et B est 10.

(2) Pour un individu donné à un instant donné, l'utilité de A unités de (*a*) *excède* l'utilité de B unités de (*b*) si l'individu préfère (ressent un *désir* pour) A à l'exclusion de B plutôt que B à l'exclusion de A. Dans le même cas l'utilité de B est dite *moindre* que l'utilité de A.

La troisième définition sera donnée au § 4.

Les deux définitions précédentes sont exactement semblables à celles relatives à toute autre grandeur mathématique.

Ainsi, deux forces sont égales, si agissant seules au même instant sur un même point en des directions opposées, elles *n'en* modifient *pas* le mouvement. L'une est plus grande que l'autre lorsqu'elle provoque un mouvement additionnel dans sa direction. De même : « deux masses sont égales lorsque, se mouvant en sens opposés avec des vitesses égales sur une même ligne droite et venant à se heurter l'une contre l'autre, elles sont immobilisées par le choc » (1). Deux grandeurs

(1) Price, *Calculus*, vol. III, p. 316.

géométriques sont égales si elles peuvent être amenées à coïncider, etc., etc.

Exactement comme la coïncidence est la preuve de l'égalité et de l'inégalité de figures géométriques, et que la pointe de la balance fournit la preuve de l'égalité ou de l'inégalité de poids, de même le désir de l'individu est la preuve de l'égalité ou de l'inégalité d'utilités. Il y a lieu de noter que dans chaque définition d'égalité figure la locution « *ne... pas* » ou son équivalent. Une forme type d'annulation est ainsi mise en évidence.

### § 3

Voyons comment ces définitions de l'utilité s'appliquent à un acte d'achat. Un individu I se présente sur un marché où certains prix sont établis pour échanger une certaine quantité d'un produit (*a*) contre un autre (*b*). Nous pouvons supposer que les prix soient tels qu'il donne un gallon de (*a*) et reçoive deux boisseaux de (*b*), puis un second gallon pour deux nouveaux boisseaux, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait donné A gallons et reçu B boisseaux. A quel point s'arrête-t-il ?

Bien que les « valeurs d'échange » de A gallons de (*a*) et de B boisseaux de (*b*) soient égales, leurs *utilités* (pour I) ne le sont pas. Il préfère B à l'exclusion de A, car son acte prouve sa préférence (postulat). Par suite, conformément à la définition (2), l'utilité de B excède celle de A.

Nous pouvons écrire :

$$\text{ut. de B} > \text{ut. de A}$$

Pourquoi alors cessa-t-il d'acheter du (*b*) ? Il a vendu exactement A gallons contre B boisseaux. En s'arrêtant là il a montré qu'il préfère ne pas acheter *d'avantage*

(postulat). *Ergo* l'utilité d'une petite quantité en plus, soit un boisseau supplémentaire de (*b*) est moindre que l'utilité du nombre correspondant de gallons de (*a*) (Déf. 2). De même il préfère ne pas acheter *moins*. *Ergo* l'utilité d'une petite quantité en moins, soit un boisseau de moins, est plus grande que celle des gallons qui ont été donnés en paiement. Dès lors, en vertu du principe mathématique de continuité, si la petite quantité en plus ou en moins est rendue infiniment petite et égale à  $dB$ , les deux *inégalités* précédentes deviennent indistinctes et se fondent en une même *équation* générale, à savoir :

$$\text{ut. de } dB = \text{ut. de } dA$$

$dB$  et  $dA$  étant ici des éléments *échangeables*. Mais le dernier élément  $dB$  est échangé contre  $dA$  dans le même rapport que  $A$  a été échangé contre  $B$  ; c'est-à-dire que l'on a l'équation :

$$\frac{A}{B} = \frac{dA}{dB}$$

dont chaque rapport est le rapport d'échange ou le prix de  $B$  en fonction de  $A$ ,  
ou bien :

$$\frac{B}{dB} = \frac{A}{dA}$$

En multipliant cette équation par la première, nous avons :

$$\frac{\text{ut. de } dB}{dB} \cdot B = \frac{\text{ut. de } dA}{dA} \cdot A$$

ce que l'on peut écrire (1) :

$$\frac{dU}{dB} \cdot B = \frac{dU}{dA} \cdot A$$

(1) Cf. JEVONS, *Pol. Econ.*, p. 99.

Les dérivées employées ici ont reçu de Jevons le nom de *final degree of utility* (1) (degré final d'utilité) et de Marshall celui de *marginal utility* (2) (utilité marginale). On peut donc traduire comme suit l'équation qui vient d'être obtenue : *Pour un acheteur donné, à l'instant où il achète, la quantité du bien acheté multipliée par son utilité marginale est égale au produit analogue relatif au bien vendu.* Ou encore de la manière suivante : Pour un acheteur donné, les utilités de A et de B, quoique inégales en réalité, *seraient* égales si l'on attribuait aux diverses parties de A (et aussi de B) le même degré d'utilité qu'à son dernier élément infinitésimal. Cette égalité hypothétique est à la base, comme on le verra par la suite, de la notion de l'égalité des *valeurs* de A et de B.

#### § 4

Mais les deux définitions (1) et (2) ne déterminent pas entièrement le sens dans lequel il faut entendre que l'utilité est une quantité. L'indication que les « rampes » de deux parties d'une route sont égales ou inégales (c'est-à-dire qu'elles font des angles égaux ou inégaux avec une horizontale) ne nous renseigne pas sur la question de savoir si l'une sera *deux fois* plus raide que l'autre. Cette indication n'implique aucune mesure préliminaire des « rampes » par les sinus de leurs angles avec l'horizon, ou par les tangentes de ces angles, ou par ces angles eux-mêmes. Si les deux parties de la route avaient respectivement des inclinaisons de 10° ou de 20°, leurs rampes seraient dans un rapport de 1.97 si on les mesurait par les sinus, de

(1) JEVONS, *ibid.*, p. 51.

(2) MARSHALL, *Prin. of Econ.*, Préface, p. xiv.

2.07 par les tangentes et exactement de 2 par les angles. Depuis longtemps les savants pouvaient indiquer et déterminer quand deux corps sont également ou inégalement chauds. Mais jusqu'au milieu de ce siècle (1), les physiciens n'attribuèrent aucune signification à l'expression « deux fois plus chaud ».

C'est sur ce point particulièrement que l'exactitude a fait défaut en économie mathématique. Jevons avoue franchement que « nous ne pouvons que rarement ou même jamais affirmer qu'un plaisir est un multiple exact d'un autre » (2).

Cela étant, dans toute la Partie I nous supposons que l'utilité d'une marchandise (ou d'un service) quelconque dépend de la quantité de cette marchandise (ou de ce service), mais *est indépendante des quantités des autres marchandises et services*. C'est là une supposition préliminaire à la définition que nous cherchons.

Notre premier problème est de déterminer le rapport de deux utilités infinitésimales. Si un individu I consomme 100 miches de pain en une année, l'utilité de la dernière portion ou, pour fixer nos idées, l'utilité de la dernière *miche* est (vraisemblablement) plus grande que ne le serait celle de la 150<sup>me</sup> miche s'il en consommait 150. Quel est le *rapport* de ces deux utilités? On l'obtient en comparant les utilités de la 100<sup>me</sup> et de la 150<sup>me</sup> miche à une troisième utilité. Cette troisième utilité est celle de l'huile (par exemple) dont nous désignerons par B le nombre de gallons consommés par I au cours d'une année. Soit  $\beta$  la quantité infinitésimale ou le petit accroissement de B dont l'utilité égalera celle de la 100<sup>me</sup> miche. Plaçons-nous

(1) La première définition thermodynamique d'une température multiple d'une autre a été donnée par W. Thomson en 1848. Voir MAXWELL, *Theory of Heat*, p. 155.

(2) JEVONS, *ibid.*, p. 13.

maintenant dans l'hypothèse de 150 miches *sans permettre à notre individu de modifier B*, sa consommation d'huile (1). L'utilité de la 150<sup>me</sup> unité lui apparaîtra égale (par exemple) à l'utilité de  $1/2 \beta$ . Dès lors on dira que l'utilité de la 150<sup>me</sup> miche est égale à la moitié de l'utilité de la 100<sup>me</sup>.

En d'autres termes, si

ut. de la 100<sup>me</sup> miche = ut. de  $\beta$ , B étant le total, et que ut. de la 150<sup>me</sup> miche = ut. de  $\beta/2$ , B étant encore le total, le rapport est ainsi défini :

$$\frac{\text{ut. de la 100}^{\text{me}} \text{ miche}}{\text{ut. de la 150}^{\text{me}} \text{ miche}} = \frac{\beta}{\beta/2} = 2.$$

Il est essentiel de remarquer que si la 100<sup>me</sup> miche apparaît comme deux fois plus utile que la 150<sup>me</sup> lorsque le rapport de leurs utilités est défini comme ci-dessus, en fonction d'éléments d'huile, elle apparaîtra également comme deux fois plus utile si ce rapport est évalué à l'aide d'un autre produit quelconque ; et aussi que le montant (B) de la quantité totale d'huile ou de tout autre bien qui est employée n'entre pas en ligne de compte.

Ce théorème peut être présenté comme suit :

Etant donné

que (1) ut. de la 100<sup>me</sup> miche = ut. de  $\beta$ , B étant le total, et que (2) ut. de la 150<sup>me</sup> miche = ut. de  $\beta/2$ , B étant le total, ainsi que (3) ut. de la 100<sup>me</sup> miche = ut. de  $\gamma$ , C étant le total, prouver que ut. de la 150<sup>me</sup> miche = ut. de  $\gamma/2$ , C étant le total, si C est la quantité d'un autre bien (c) consommée par I pendant la période considérée, et si  $\gamma$  est un élé-

(1) En fait si un individu qui, consommant 100 miches, consommerait B gallons d'huile, venait à consommer 150 miches, il utiliserait aussi *plus* d'huile. Mais ce fait ne nous empêche aucunement d'examiner comment il évaluerait les utilités s'il en utilisait la *même* quantité.

ment de (c) tel que son utilité soit égale à celle de la 100<sup>me</sup> miche.

Nous pouvons tirer de (1) et de (3) :

$$\text{ut. de la 100}^{\text{me}} \text{ miche} = \text{ut. de } \beta = \text{ut. de } \gamma, \\ (\text{100 miches, B et C étant les totaux}).$$

Cela étant, si le premier total (100 miches) est porté à 150, B et C étant inchangés, l'équation ci-dessus, en laissant de côté le premier membre, sera encore vérifiée, c'est-à-dire que l'on aura :

$$\text{ut. de } \beta = \text{ut. de } \gamma, \\ (\text{totaux 150 miches, B et C})$$

car, en vertu de notre supposition préliminaire, ces utilités sont indépendantes de la quantité de pain.

$\beta$  et  $\gamma$  étant infinitésimaux, il résulte du simple principe mathématique de continuité que :

$$\text{ut. de } \beta/2 = \text{ut. de } \gamma/2, \\ (\text{totaux B, C}).$$

donc en vertu de (2)

$$\text{ut. de la 150}^{\text{me}} \text{ miche} = \text{ut. } \gamma/2 \\ (\text{totaux 150 miches, C})$$

Q. E. D.

Dès lors notre définition devient :

$$\frac{\text{ut. de la 100}^{\text{me}} \text{ miche}}{\text{ut. de la 150}^{\text{me}} \text{ miche}} = \frac{\gamma}{\gamma/2} = 2$$

De même :

$$\frac{\text{ut. de la 100}^{\text{me}} \text{ miche}}{\text{ut. de la 150}^{\text{me}} \text{ miche}} = \frac{\delta}{\delta/2} = 2$$

etc., etc.,

tous résultats qui sont concordants.

C étant une quantité arbitraire, la définition du rapport ci-dessus est par conséquent indépendante non seulement du bien particulier employé comme terme

de comparaison, mais aussi de la quantité totale de ce bien.

Il y a lieu de noter ici que si l'utilité d'un bien dépendait des quantités des autres, deux applications de la définition conduiraient à des résultats différents (1).

Nous pouvons donner à notre définition l'expression générale suivante :

(3) Le rapport de deux utilités infinitésimales est mesuré par le *rapport de deux éléments infinitésimaux du même bien* respectivement égaux en utilité aux deux utilités dont on cherche le rapport, pourvu que ces deux éléments soient pris sur la marge de quantités finies égales.

Exprimé en symboles généraux ceci devient :

$$\frac{\text{ut. de } dA}{\text{ut. de } dB} = n, \text{ si ut. de } dA = \text{ut. de } n dM$$

(total M)

$$\text{et que ut. de } dB = \text{ut. de } dM$$

(total M également)

$n$  étant un nombre fini, positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

Cette définition s'applique non seulement aux utilités infinitésimales d'un même bien (comme la 100<sup>me</sup> et la 150<sup>me</sup> miches), mais aussi à celles de marchandises ou de services différents.

## § 5

La définition (3) est entièrement analogue aux autres définitions mathématiques. La définition de l'égalité de deux forces ne renseigne pas sur ce qu'il faut entendre

(1) Nous verrons plus loin quelles en sont les conséquences concernant nos notions relatives à l'utilité (Partie II, ch. IV).

par le rapport de deux forces. C'est là l'objet d'une autre définition : « Le rapport de deux forces est le rapport de leurs masses-accélérations ». Avant que la mécanique ne fût une science, au « sens commun » du mot « *force* » correspondait une notion réductible en dernière analyse à une sensation musculaire éprouvée en poussant ou en tirant (1). Mais pour pouvoir édifier une science positive, la force dut être définie en tenant compte de ses rapports avec l'*espace*, le *temps* et la *masse*. De même, tandis que le mot utilité a un « sens commun » primitif, sa signification relative à des sensations, si l'on veut faire de l'économique une science positive, il faut lui trouver une définition qui le rattache au *bien* objectif (2).

### § 6

(4) *L'utilité marginale d'un bien* (ainsi qu'il résulte du § 3) est la valeur limite du rapport de l'utilité de l'élément marginal à la grandeur de cet élément. Ainsi le rapport de deux utilités marginales est le rapport des utilités

(1) SPENCER, *First Principles*, p. 169.

(2) Jevons, Marshall, Gossen et Launhardt négligent d'indiquer en aucune mesure ce qu'ils entendent par le rapport de deux utilités. Cependant chacun d'eux en incorpore l'idée dans ses graphiques. EDGEWORTH (*Math. Psych.*, p. 99) estime que « just perceivable increments [of pleasure] are equatables » (les plus petites quantités [de plaisir] perceptibles sont assimilables) et il fait de ce « minimum sensible » l'unité de mesure de tout plaisir (en principe du moins). Cette définition et la mienne indiquent peut-être le point de démarcation entre la psychologie et l'économique. Pour mesurer une sensation, le minimum sensible est peut-être la seule base raisonnable (voir LAAD, *Physiological Psychology*, p. 361). Le phénomène est alors subjectif, et il en est de même de sa mesure ; tandis qu'en économique les phénomènes sont objectifs et leur mesure également.

de deux éléments marginaux divisé par le rapport de ces éléments.

Si les unités du bien considéré sont petites, l'utilité marginale est pratiquement l'utilité de la dernière unité — pour le pain, de la dernière miche, mais si cette miche est coupée en 10 tranches et que ces tranches aient des utilités différentes, l'utilité marginale du pain est plus exactement l'utilité de la dernière tranche divisée par  $\frac{1}{10}$ , et ainsi de suite *ad infinitum*.

Il est dès lors facile de trouver une unité de plaisir, dont l'absence a été reprochée (1) aux économistes mathématiciens. L'utilité de la 100<sup>me</sup> miche consommée au cours d'une année peut être prise comme unité d'utilité. On, en général :

(5) *L'utilité marginale d'un bien arbitrairement choisi sur la marge d'une quantité de ce bien arbitrairement choisie peut servir d'unité d'utilité pour un individu donné à un instant donné.*

Cette unité peut être appelée un *util*.

En mathématique une unité n'a d'intérêt que comme diviseur d'une seconde quantité, et n'est constante que dans ce sens qu'elle donne un quotient constant, indépendant d'une troisième quantité. Si un matin, à notre réveil, chaque ligne de l'univers avait été doublée, nous ne nous apercevions jamais du changement, si vraiment on peut appeler cela un changement, et nos sciences ou nos formules n'en seraient point troublées.

## § 7

Après ces définitions il est maintenant possible de donner une signification à la courbe d'utilité de Jevons,

(1) Dr INGRAM, Article : *Pol. Econ.*, dans *Ency. Brit.*, XIX, 399.

dont les abscisses représentent les quantités d'un bien (le pain, par exemple) qu'un individu donné est susceptible de consommer au cours d'une période donnée, et les ordonnées les utilités de la dernière miche (i. e. la moins utile). En effet, si à l'abscisse représentant 100 miches correspond une ordonnée d'une longueur arbitraire (soit un pouce) destinée à figurer l'utilité de la 100<sup>m</sup>e miche, nous pouvons l'employer comme unité (util). Pour une autre abscisse, telle que celle qui représente 85 miches dont l'utilité marginale est (par exemple) double de la précédente, l'ordonnée doit être de deux pouces, et ainsi de suite. Pour un autre bien, comme l'huile, si l'utilité marginale de A gallons est différente de l'utilité de la 100<sup>m</sup>e miche de pain, et que leur rapport soit (par exemple) trois, il y a lieu de tracer une ordonnée de trois pouces. Dans toutes les courbes ainsi construites il n'y a qu'une seule ordonnée arbitrairement choisie, à savoir : celle qui représente l'utilité de la 100<sup>m</sup>e miche.

### § 8

Ce ne sont que des différentielles des utilités qui sont jusqu'ici entrées en ligne de compte. Pour obtenir l'utilité totale d'une quantité de pain donnée, on fait la somme des utilités afférentes aux différentes miches. Ou, en général :

(6) *L'utilité totale d'une quantité donnée d'un bien à un instant donné et pour un individu donné est l'intégrale de l'utilité marginale multipliée par la différentielle de ce bien.*

C'est-à-dire que :

$$\text{ut. de } (x) = \text{ut. de } (dx_1) + \text{ut. de } (dx_2) + \dots + \text{ut. de } (dx_n)$$

$$= \int_0^x ut. (dx)$$

$$= \int_0^x \frac{dU}{dx} dx.$$

(7) On peut donner le nom de VALEUR-UTILITÉ d'un bien au produit de la quantité de ce bien par son utilité marginale, ou

$$x. \frac{dU}{dx}$$

Ce nom est suggéré par l'expression de valeur-monnaie représentant la quantité d'un bien multipliée par son prix (Cf. § 3).

(8) Le BÉNÉFICE, ou rente du consommateur, est l'utilité totale diminuée de la valeur-utilité.

C'est-à-dire que :

$$\text{Bénéfice} = \int_0^x \frac{dU}{dx} dx - x. \frac{dU}{dx}.$$

C'est l'utilité totale effective diminuée de l'utilité totale qu'offrirait le bien si sa totalité présentait la même utilité que son dernier élément, le moins utile.

Il y a lieu de remarquer que l'utilité totale et le bénéfice ne correspondent pas à des *avantages instantanés*, mais sont la somme d'éléments d'utilité se succédant par *substitution*. Leur évaluation oblige l'individu à apprécier l'utilité de la 90<sup>m</sup>e miche dans l'hypothèse où il n'en consommerait que 90 par an, et ensuite à abandonner cette hypothèse pour lui substituer successivement les hypothèses de 91, 92, 93, etc., miches, toutes pour la même année. En d'autres termes, elle implique la prise en considération de nombre d'hypothèses mutuellement exclusives *relatives à la même période*.

## § 9

Les définitions précédentes ont été établies pour un instant déterminé. Cela parce que, dans la vie actuelle, les achats sont effectués par opérations instantanées distinctes. Mais, en économique, les quantités importantes de bien sont achetées, vendues, produites, consommées à raison de « tant de tonnes par an », de « tant de yards par jour », etc. Il faut donc introduire l'élément temps pour rendre nos définitions applicables à de telles quantités. D'où l'hypothèse suivante :

*Au cours de la période donnée (c'est-à-dire la période à laquelle correspondent les quantités de biens considérées), l'utilité marginale pour un individu donné d'un bien donné est la même à tous les instants où il en achète ou en consomme ou bien où il en vend ou en produit.*

Ce qui entraîne l'hypothèse que les prix ne varient pas, car les prix (comme nous le verrons) sont proportionnels aux utilités marginales.

Une ménagère achète (par exemple) 10 livres de sucre à 10 cents la livre. Lorsqu'elle conclut le marché, elle estime en gros que la dernière ou dixième livre vaut approximativement son prix. Elle ne s'arrête pas à la cinquième livre parce qu'elle l'estime plus que les 10 cents qu'elle lui coûte. Il est possible qu'elle n'achète plus de sucre pendant une quinzaine. Quand elle en achète de nouveau, nous supposons que c'est au même prix que primitivement, en sorte que la dernière livre qu'elle achète a la même utilité que la dernière livre qu'elle avait précédemment achetée. Admettons qu'elle en achète 15 livres, puis une quinzaine plus tard 5 livres seulement, tout dépendant de l'usage qu'elle a l'intention d'en faire. L'achat total annuel pourra être ainsi de 250 livres, et nous pourrons écrire :

ut. (10<sup>m</sup> liv.) 1<sup>er</sup> janv. = ut. (15<sup>m</sup> liv.) 15 janv.  
 = ut. (5<sup>m</sup> liv.) 30 janv.  
 = etc.  
 = ut. (250<sup>m</sup> liv.) pour l'année totale.

Donc : *L'utilité marginale d'une certaine quantité d'un bien pour une période donnée (soit une année) est définie par l'utilité marginale de ce bien dans toutes les occasions où il a été acheté ou consommé au cours de cette année, la somme totale des achats isolés étant l'achat et la consommation annuels donnés.*

### § 10

Dans le cas envisagé, l'utilité marginale de 250 livres par an égalait l'utilité marginale de 10 cents. Nous pouvons de même apprécier pratiquement l'utilité marginale de 200 livres en supposant que le prix du sucre soit tel que notre ménagère en achète 200 livres. Diverses alternatives peuvent ainsi être envisagées *pour la même période*, et l'on peut en déduire la construction d'une courbe d'utilité dont l'une des ordonnées soit la consommation annuelle de sucre. Quant à l'établissement de cette courbe en conformité de données statistiques, c'est une autre affaire et bien plus difficile, quoiqu'il n'y ait nullement lieu de désespérer de sa réussite.

Les courbes de cette nature sont les seules à envisager ici. Mais il est clair qu'il y a aussi des courbes d'utilité relatives à chaque époque d'achat (1). Ces courbes seraient différentes de la courbe « annuelle » et elles varieraient de l'une à l'autre.

(1) Ce sont les courbes de FLEEMING JENKIN, *Graphic Representation of Supply and Demand, Grant's Recess Studies*, p. 151, Edimburgh, 1870.

## § 11

Pour répondre à une objection possible, il y a lieu de faire ressortir que l'introduction d'une courbe d'utilité « annuelle » n'implique aucun calcul rigoureux de la part de l'individu au sujet de son revenu et de ses recettes futurs. Il peut même ignorer, et il ignore généralement, totalement le nombre de livres de beurre qu'il consomme par an. Il procède à des achats successifs au fur et à mesure de ses besoins, et ce n'est que sur ces actes isolés qu'il fait porter ses soins et son habileté. Cependant, si l'utilité marginale qu'il accorde à chaque achat est toujours appréciée de même par rapport à d'autres biens, c'est nécessairement là l'utilité marginale relative à l'année, et l'achat total annuel est la quantité qui présente cette utilité marginale. Cette utilité marginale ou degré « final » d'utilité du bien pour une année n'est évidemment pas l'utilité de la dernière quantité en date (c'est-à-dire au 31 décembre), mais l'utilité de la portion la moins utile de l'un quelconque des différents achats.

## § 12

On peut objecter de plus qu'il y a dans la question un élément variable que les hypothèses précédentes laissent de côté. Nous avons supposé que les prix ne varient pas pendant la période donnée, et que de plus les appréciations individuelles d'utilité ne varient pas non plus. On peut faire remarquer à juste titre que non seulement les prix varient de jour en jour, mais que, quand bien même ils ne le feraient pas, les appréciations individuelles de l'utilité seraient variables et que, bien

qu'à l'instant où il conclut un marché, son appréciation de l'utilité puisse être regardée comme correspondant au prix fait, l'individu a souvent probablement, et parfois même certainement, à regretter ce qu'il a fait, si bien que s'il avait à revivre l'année écoulée, il voudrait agir tout différemment.

Cette objection est une bonne illustration de ce que souvent au travers d'un microscope les grands faits généraux apparaissent obscurs. En fait, la prise en considération de toute une période tend à éliminer les éléments sporadiques en question. Tout d'abord, si les prix varient d'heure en heure sous l'influence des excitations et des rumeurs qui se succèdent, et de saison en saison pour des causes météorologiques et pour d'autres raisons, toutefois ces fluctuations se compensent mutuellement. Le prix général au cours d'une année est le seul prix indépendant des influences sporadiques et accidentelles. Ce prix général n'est pas la moyenne arithmétique des prix de chaque jour, mais une moyenne établie de telle sorte que si elle avait constamment constitué le prix courant au cours de la période considérée, les quantités achetées et vendues auraient été exactement ce qu'elles sont en réalité. En second lieu, les effets du caprice de chacun se compensent mutuellement. Si un individu a approvisionné un trop grand stock de marchandises une semaine, il en achètera moins la suivante. La théorie des probabilités assure donc en fait l'accord entre la spéculation et la réalité. Les hypothèses en apparence arbitraires relatives à la constance du prix, etc., peuvent être regardées comme des vues adéquates à une moyenne idéale, ainsi qu'il vient d'être indiqué.

Il est une observation cependant qu'il ne faut pas négliger. Bien que les variations de prix accidentelles ou que les choix dictés par le caprice introduisent tout

à la fois des erreurs positives et des erreurs négatives, et que ces sources d'erreurs s'annulent ainsi largement l'une l'autre, elles ont toutefois invariablement pour effet à l'égard de l'*utilité totale* et du *bénéfice* de les diminuer. Que l'on achète trop ou trop peu, que l'on vende trop bon marché ou trop cher, on est toujours sûr de diminuer le bénéfice. C'est là-dessus que repose la vertu de l'assurance et le vice du jeu. Ni l'un ni l'autre ne changent (directement) la somme des richesses. Mais l'assurance modifie et le jeu intensifie ses fluctuations. C'est ainsi que l'une augmente et que l'autre diminue le *bénéfice*.

### § 13

On peut objecter en outre aux définitions précédentes que l'emploi des quantités infinitésimales est inapproprié puisqu'un individu ne compte pas et ne peut pas compter par quantités infinitésimales. La même objection apparente s'oppose à toute application de l'analyse. Nous apprécions les forces au moyen de poids, mais nous ne pouvons peser des masses infinitésimales, et il n'en existe probablement pas ; néanmoins la théorie des forces part de quantités infinitésimales. Nous appliquons les fluxions à la densité variante de la terre, quoique nous sachions que si nous prenons réellement le rapport infinitésimal de la masse au volume, nous obtiendrons en général zéro, puisque la matière est discontinue. La pression d'un gaz confiné est due aux chocs de ses molécules contre le récipient qui le contient. A chaque rebondissement de molécule la différence de moment divisée par l'élément de temps est la pression. Néanmoins en réalité à n'importe quel instant, la valeur de cette fluxion est entièrement illusoire.

Mais ces faits ne prouvent rien contre l'emploi des fluxions dans une théorie raisonnable des forces, de la densité ou de la pression des gaz. Dans les cas de discontinuité, les fluxions ont d'importantes applications, bien que les quantités infinitésimales ne puissent exister. Le taux d'accroissement de la population à un moment donné est une notion importante, mais quelle en est la signification ? Il est expédient de le définir comme étant l'accroissement infinitésimal de la population divisé par le temps de cet accroissement, bien

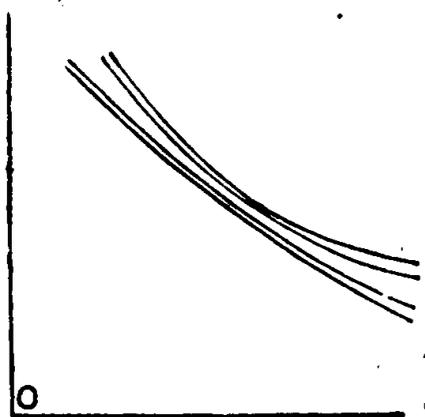


Fig. 1.

que nous sachions que la population s'accroît d'une manière discontinue par la naissance d'individus entiers et non de fragments infinitésimaux. Pratiquement nous pouvons avoir l'utilité marginale *approximative* d'un bien tout comme nous avons *approximativement* le taux d'accroissement de la population en prenant en considération de petites quantités à la place de quantités infinitésimales.

Dans la réalité, l'inégalité des utilités est la règle, et des utilités rigoureusement égales n'existent jamais. Au lieu d'une courbe d'utilité, il faudrait tracer une bande (*fig. 1*) aux limites imprécises et d'une largeur dépendant en général des soins antérieurement apportés par l'individu dans la répartition et les modes de sa consommation.

## § 14

L'utilité définie comme il est dit dans les dernières sections ne jette pas l'économiste dans les discussions

relatives, par exemple, aux lois des états subjectifs du plaisir et de la peine, à l'influence de l'anticipation de ceux-ci dans ses rapports avec leurs probabilités (1), aux débats auxquels donne lieu la question de savoir s'ils diffèrent en qualité aussi bien qu'en intensité et en durée (2), si le devoir peut ou ne peut pas exister en tant que mobile indépendant du plaisir (3), etc.

Il ne s'ensuit pas que ces discussions n'ont ni sens ni importance. Sans aucun doute, le plaisir et la peine sont en relation avec le désir, et, sans aucun doute, ils ont une importante fonction biologique en tant qu'enregistreurs des états de « santé » ou des états « pathologiques » (4). Mais l'économiste n'a pas besoin d'envelopper sa propre science dans les brumes de l'éthique, de la psychologie, de la biologie et de la métaphysique.

Peut-être utilité est-il un mot mal choisi pour représenter la grandeur en question. Désirabilité (5) serait moins de nature à induire en erreur, et, son opposé, indésirabilité, serait certainement préférable à désutilité (dis-utility). « Utilité » est un héritage de Bentham et de sa théorie des plaisirs et des peines. Pour nous son mot est d'autant plus acceptable qu'il est moins empêtré dans sa théorie.

## § 15

Ce chapitre peut être ainsi résumé :

*Postulat* : Chaque individu agit selon ses désirs.

(1) JEVONS, p. 72.

(2) JEVONS, p. 28, etc.

(3) DARWIN, *Descent Man*, I, p. 76, SIDGWICK, *Methods Ethics*, ch. IV.

(4) MARSHALL, *Prin. of Econ.*, p. 181; SPENCER, *Data of Ethics*, p. 79; L. STEPHEN, *Science of Ethics*, p. 366.

(5) MARSHALL, *Prin. of Econ.*, p. 306.

*Définitions de l'utilité.*

(2) et (1)  $\text{ut. de } A \geq \text{ut. de } B$

si l'individu donné à un instant donné préfère A à B ou ne préfère pas l'un à l'autre.

(3)  $\frac{\text{ut. de } dA}{\text{ut. de } dB} = n$

si  $\text{ut. de } dA = \text{ut. de } ndM$  (total M) et que  $\text{ut. de } dB = \text{ut. de } dM$  (total M également).

(4)  $\frac{dU}{dA} \equiv \text{Utilité marginale.}$

(5)  $\frac{dU}{dA} \equiv \text{Unité d'utilité (util) (A étant donné).}$

(6)  $\int_0^A \frac{dU}{dA} \cdot dA \equiv \text{Utilité totale.}$

(7)  $A \cdot \frac{dU}{dA} \equiv \text{Valeur utilité.}$

(8)  $\int_0^A \frac{dU}{dA} \cdot dA - A \frac{dU}{dA} \equiv \text{Bénéfice.}$

*Hypothèse :*  $\frac{dU}{dA} \equiv \text{Fonction de } A \text{ seulement.}$

*Corollaires :* De (1) et de (2) et du postulat il résulte que lorsque B est échangé contre A

$$\frac{dU}{dB} \cdot B = \frac{dU}{dA} \cdot A.$$

De (3) et de l'hypothèse il résulte que dans l'équation :  $\text{ut. de } dA / \text{ut. de } dB = n$ , la valeur de  $n$  est indépendante du bien particulier et de sa quantité M figurant dans la définition.

## CHAPITRE II

### Mécanisme.

#### § I

Il est rare que celui qui écrit sur l'économique manque d'établir quelque comparaison entre l'économique et la mécanique. L'un parle d'une « correspondance dans les grandes lignes » entre le jeu des « forces économiques » et l'équilibre mécanique. Un autre compare l'uniformité de prix à l'uniformité de niveau de la surface de l'eau. Un autre (Jevons) compare ses lois de l'échange à celles de l'équilibre d'un levier. Un autre (Edgeworth) représente le « système » économique comme un système de lacs de niveaux différents. Un autre compare la société à une masse plastique, telle qu'une « pression » exercée en une région se disperse dans toutes les « directions ». En fait, l'économiste emprunte à la mécanique une grande partie des mots de son vocabulaire. En voici des exemples : équilibre, stabilité, élasticité, expansion, extension, contraction, cours, écoulement, force, pression, résistance, réaction, distribution (prix), niveaux, mouvement, frottement.

Celui qui étudie l'économique embrasse plus d'idées en termes de mécanique qu'en termes de géométrie, et

une illustration mécanique correspond plus complètement aux notions qu'il a précédemment acquises qu'une illustration graphique. Pourtant, autant que je sache, personne n'a entrepris une représentation systématique sous la forme d'un système d'actions et de réactions mécaniques de cet équilibre beau et compliqué que l'on constate entre les « échanges » d'une grande ville, mais dont les causes et les effets s'étendent au loin à l'extérieur.

### § 2

En vue de simplifier notre discussion, nous faisons les hypothèses préliminaires suivantes (1) :

(1) Un marché isolé, unique, suffisamment large pour éviter qu'un seul homme puisse exercer *sciemment* une influence sur les prix.

(2) Une période donnée, soit un an.

(3) Au cours de cette période, le taux de la production et celui de la consommation sont égaux et tels que les stocks légués par l'année précédente et ceux laissés pour l'année suivante exercent une influence qui soit constante ou qui ne soit pas fonction des quantités produites ou consommées au cours de l'année. Leur influence se traduit par la *forme* des courbes à employer, exactement comme l'influence du climat, de la population, des conditions politiques, etc.

(4) Chaque individu figurant sur le marché agit librement, en toute indépendance, et conserve les mêmes dispositions pendant toute la période considérée, de sorte que les *formes* de ses courbes d'utilité ne changent pas.

(1) Ce sont (essentiellement) celles d'Auspitz et Lieben.

(5) Tous les articles pris en considération sont indéfiniment divisibles, et chaque homme est libre de suspendre en tout point sa production ou sa consommation.

(6) L'utilité marginale correspondant à la consommation de chaque bien décroît quand le montant de la consommation croît, et la désutilité marginale correspondant à la production de chaque bien croît quand le montant de la production croît.

(7) Comme il est dit au chapitre I, § 4, l'utilité de chaque bien est indépendante des quantités des autres biens, et il en est de même pour la désutilité.

### § 3

Considérons sur la figure 2 la courbe MN tracée avec OE et OA comme axes. Cette courbe est telle que l'aire hachurée représente la quantité d'un bien donné consommée par un individu donné en une période donnée, et que l'ordonnée (tracée de haut en bas) représente de O à R son utilité marginale. La figure offre évidemment l'expression de ce fait que lorsque la quantité de bien croît, son utilité marginale décroît et *vice versa* (1).

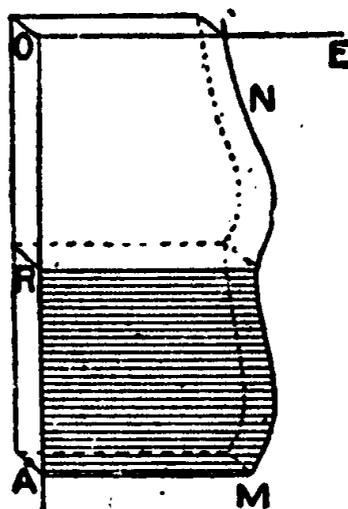


Fig. 2.

OA représente ce que serait l'utilité marginale si la quantité de bien consommée devenait infinitésimale.

Considérons en outre une citerne de verre (fig. 2),

(1) Pour les autres propriétés de la courbe MN et ses rapports avec les courbes de Jevons, Auspitz et Lieben et Fleeming Jenkin, voir Appendice I, Division II.

constituée en prenant la figure OAMN comme face antérieure et en lui donnant une épaisseur uniforme d'une unité, de sorte que le volume de liquide inclus soit toujours numériquement égal à l'aire de la face. La quantité de liquide placée dans la citerne peut alors représenter le bien, et la distance de O à sa surface, son utilité marginale.

§ 1. — Un bien (A). — Un consommateur (I).

Considérons la figure 2 représentant pour I la citerne d'utilité relative à A. Prenons comme unité d'utilité l'utilité marginale de la monnaie en la supposant constante. De la sorte la citerne a (par exemple) un pouce d'épaisseur; le nombre de pouces cubes d'eau représente le nombre d'unités du bien (yards, gallons ou livres, etc.) consommées par l'individu au cours d'une période donnée (un an par exemple), et l'ordonnée OR représente (en pouces) le nombre de dollars auquel l'individu estime le dernier yard ou le dernier gallon (par exemple) du bien.

Puisque le marché est suffisamment large pour qu'aucune influence consciente ne puisse être exercée sur le prix par l'individu I, cet individu agit d'après le prix fixé ( $p$  dollars). Il consommera par suite une quantité de A telle que son utilité marginale en dollars égale celle du prix  $p$ , c'est-à-dire que la citerne sera remplie jusque en R tel que  $OR = p$ . Cela est évident, car s'il avait *moins* consommé, OR serait plus grand que  $p$ , c'est-à-dire qu'il apprécierait une petite quantité supplémentaire du bien plus que les dollars à donner en échange et par suite il l'achèterait, et s'il avait consommé *davantage*, les considérations inverses seraient vraies.

Si le prix s'élève, OR croîtra, et la consommation diminuera, mais si le prix s'abaisse, la consommation augmentera. Si le prix tombe à zéro, comme c'est le cas pour l'air et l'eau, la quantité consommée remplit toute la citerne jusqu'à l'axe horizontal. Ce volume constitue par conséquent la quantité assurant la *satisfaction maximum*. Si le prix s'élève jusqu'à OA, l'individu cessera de consommer. Ce prix est donc le *prix maximum* limite auquel il achètera.

Le contenu liquide de la citerne peut être considéré comme composé de couches horizontales infinitésimales superposées, représentant chacune un élément du bien. La cote, ou distance à partir de l'origine, de chaque couche représente le degré d'utilité de cette couche. La dernière couche, ou couche supérieure, est sur la *marque* de la quantité totale, et la distance verticale la séparant de l'origine est le degré d'utilité de cette couche ou élément marginal du bien ou, en un mot, son utilité marginale. Ainsi la *marque* de la consommation a dans la citerne un véritable analogue matériel.

### § 5. — Un bien. — Un producteur.

Les définitions de l'utilité du chapitre I s'appliquent également à l'utilité négative ou désutilité. En correspondance avec tout ce qui a été dit au sujet de la consommation se placent des considérations analogues relatives à la production. Ainsi, nous pouvons construire une courbe et une citerne de désutilité (*fig. 3*), la désutilité marginale (OR) étant mesurée vers le haut à partir de l'origine. Si l'utilité est mesurée en monnaie comme dans la dernière section, OA représente le prix minimum auquel l'individu produira le bien, OR le prix

courant, l'aire hachurée (ou le volume du contenu placé derrière), la production.

La désutilité marginale de la production est représentée ici comme croissant lorsque la quantité de produit croît. Cela suppose une « loi de rendement décroissant ». Une telle loi est, il est vrai, rarement vérifiée, si tant est qu'elle le soit jamais rigoureusement, quand on l'applique à de petites quantités ; c'est-à-dire que le coût, ou désutilité, de production de la première unité n'est pas moindre, mais plus

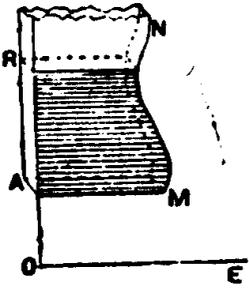


Fig. 3.

grand que celui de la production de la seconde. Mais la désutilité marginale n'est décroissante que jusqu'à un certain point, à partir duquel elle croît. Cela se produit constamment, même dans la fabrication. Actuellement les manufactures américaines de cycles ne parviennent pas à satisfaire aux commandes. Si elles tentaient de pousser plus vivement leur production, le coût des produits supplémentaires obtenus dépasserait le prix de vente. En général, au taux auquel une maison produit en réalité, la loi de croissance de la désutilité se trouve vérifiée.

Il serait possible, en retournant la courbe MN vers le bas, de réaliser une citerne appropriée à la représentation correcte tant de la loi de décroissance que de celle de la croissance, mais comme nous nous préoccupons principalement du point d'équilibre, et qu'en ce point la loi de croissance se trouve pratiquement vérifiée, il n'y a pas lieu de tracer ici des courbes aussi compliquées.

Si un producteur a une puissance de production telle qu'il soit à même d'agir *sciemment* sur les prix en faisant varier sa production, il peut arriver qu'il réalise le maximum de bénéfice en limitant sa production en un

point où se vérifie encore la loi de décroissance de la désutilité, car en étendant sa production, le prix de vente pourrait décroître plus rapidement que le coût de production.

Ces faits, ainsi que cet autre fait important que dans une entreprise de production les frais se décomposent en « fixes » et en « proportionnels », donnent naissance à nombre d'intéressants cas d'instabilité et d'indétermination, et conduisent aux problèmes relatifs aux monopoles, aux ententes, aux guerres de tarifs, etc., etc. Chacun d'eux comporte une étude spéciale. Dans ce présent mémoire, cependant, nous ne ferons porter notre attention que sur les phénomènes de production qui sont strictement analogues à ceux de la consommation (Voir Appendice II, § 8).

### § 6. — Un bien. -- Plusieurs consommateurs.

Considérons la figure 4 représentant les citernes d'utilité correspondant à tous les individus I, II, III, IV, ... N, figurant sur le marché, et supposons que l'utilité soit mesurée en monnaie comme précédemment, l'utilité de la monnaie étant considérée comme une constante (soit un util).

L'eau (indiquée par des hachures obliques) placée dans les tubes de communication ne représente pas du bien.

L'eau se met de niveau. C'est exactement ce qui arrive dans le monde économique et peut être énoncé en le théorème : *Une quantité donnée d'un bien, destinée à être absorbée par un marché au cours d'une période donnée, se répartit entre les divers individus de telle sorte que les utilités marginales mesurées en monnaie soient égales. En outre, l'utilité marginale ainsi déterminée est le prix.*

C'est la conséquence de ce qui précède, car il ne peut y avoir qu'un prix, et chaque individu agit de manière à réaliser une utilité marginale égale à ce prix, conformément à ce que nous avons vu au § 4.

Si l'on enfonce le tampon (1) S, une plus grande quantité de liquide (de bien) pénètre dans les citernes,

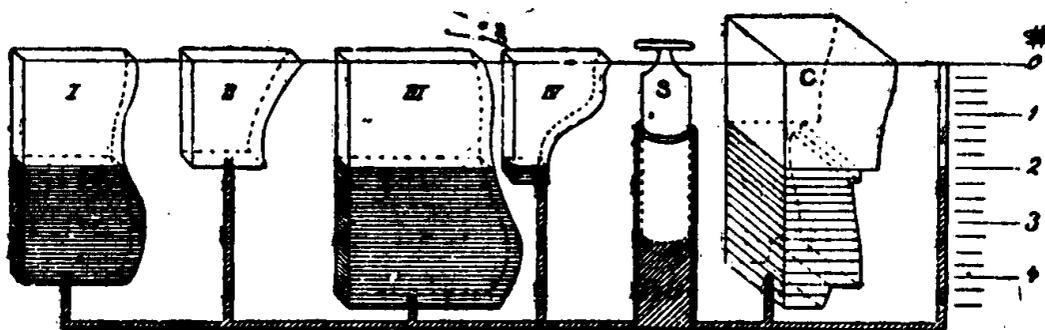


Fig. 4.

il se produit un changement de niveau inévitable, et le prix décroît. S'il descend jusqu'à 2, il commence à recevoir satisfaction. Ce bien commence à être « à sa portée ».

Il y a lieu de noter que pour chaque individu pris isolément, l'existence d'un niveau général du prix est un fait intangible qu'il ne peut modifier et d'après lequel il doit régler sa consommation, exactement de même que l'on peut dire que le niveau général de l'eau dans cent citernes différentes détermine la part de chaque citerne particulière. Mais, pour le système envisagé dans son ensemble, le niveau du prix résulte de la quantité du bien mis en vente. Ce qui apparaît comme un rapport de cause à effet à un individu est un rapport d'effet à cause pour l'ensemble du marché.

(1) Une pelote de compression à frottement serait employée en pratique. Les mécanismes indiqués dans les descriptions sont ceux qu'il est le plus facile de dépeindre, et dans beaucoup de cas ils diffèrent de ceux qui peuvent être réellement employés.

Les quantités du bien et les utilités marginales se limitent mutuellement et se règlent d'elles-mêmes, de manière à satisfaire à trois conditions, à savoir : 1° celle qui résulte des formes des citernes ; 2° celle qui résulte du montant de la quantité du bien vendu sur le marché ; 3° de l'uniformité de prix ou d'utilité marginale.

§ 7. — Interprétation analytique.

L'interprétation algébrique du mécanisme précédent ou du phénomène économique lui-même est la suivante :

Soit  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  les quantités du bien (inconnues quant à présent) consommées par I, II, III, ... N. Soit

$$\frac{dU}{dA_1}, \frac{dU}{dA_2}, \dots, \frac{dU}{dA_n}$$

leurs utilités marginales (inconnues). Les trois conditions indiquées au § 6 deviennent dès lors :

(L'unité d'utilité (util) est celle du dollar marginal)

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dU}{dA_1} = F_1(A_1) \\ \frac{dU}{dA_2} = F_2(A_2) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dU}{dA_n} = F_n(A_n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ équations.} \\ 2n \text{ inconnues.} \end{array}$$

$$(2) \quad \left\{ A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = K \right. \left. \begin{array}{l} 1 \text{ équation.} \\ \text{aucune nouvelle inconnue.} \end{array} \right.$$

(L'unité d'utilité est celle du dollar marginal)

$$(3) \quad \left\{ \frac{dU}{dA_1} = \frac{dU}{dA_2} = \dots = \frac{dU}{dA_n} \right\} \begin{array}{l} n - 1 \text{ équations indépendantes.} \\ \text{aucune nouvelle inconnue.} \end{array}$$

Ainsi le nombre des équations est :

$$n + 1 + (n - 1) = 2n$$

et celui des inconnues :

$$2n + 0 + 0 = 2n.$$

Le nombre des équations et celui des inconnues sont donc égaux, et toutes les quantités et utilités sont déterminées.

### § 8. — Totalité du bien.

Supposons que C (*fig. 4*) soit la courbe *moyenne* (1) de toutes les courbes individuelles I, II, III, ... N et que la nouvelle citerne ait une épaisseur égale à la somme des épaisseurs des citernes individuelles. Il y aura alors autant d'eau dans la citerne totalisante que dans toutes les autres (1). L'eau contenue dans la citerne totalisante peut être regardée comme la reproduction des contenus des citernes individuelles.

(1) Formée comme suit : on prend des *points de même prix* sur les courbes individuelles, c'est-à-dire des points de même ordonnée (tels que  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ ) et utilisant la même ordonnée comme nouvelle ordonnée, on prend la moyenne de leurs abscisses comme nouvelle abscisse, et on donne à la nouvelle citerne une épaisseur égale à la somme des épaisseurs de toutes les citernes individuelles. Si donc on laisse arriver le liquide dans une telle citerne au même niveau que dans les citernes individuelles, la quantité de liquide contenu dans celle-ci sera égale au contenu total des citernes individuelles. Il est évident en effet que la surface libre de l'eau dans la grande citerne présente une aire égale au total des surfaces libres des petites, et comme l'égalité des couches ou tranches infinitésimales horizontales qui en résulte se maintient à tous les niveaux, les sommes de ces couches sont aussi égales.

Dans la citerne C, le fait est presque trop évident pour mériter d'être mentionné, un accroissement de l'offre du bien (représenté par l'enfoncement du tampon) réduit le prix, tandis qu'une diminution de l'offre l'augmente. C'est là tout ce que mettent en évidence des « courbes de demande » comme celles de Fleeming Jenkin (1).

## § 9

La figure 5 et des développements entièrement ana-

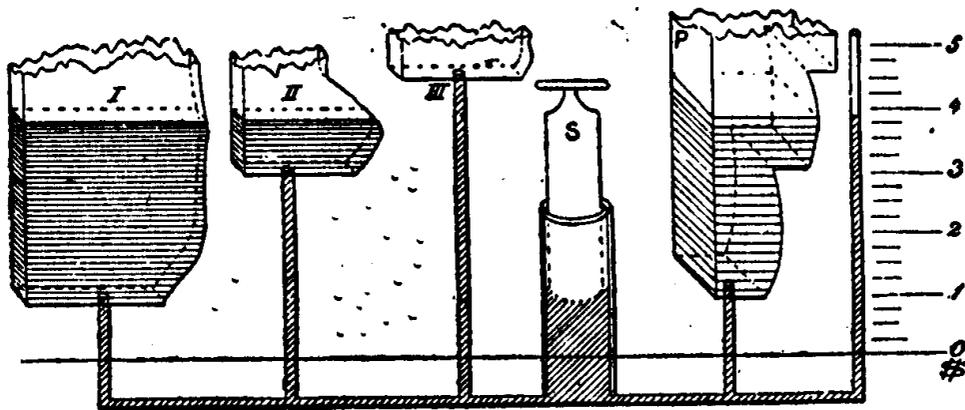


Fig. 5.

logues aux précédents s'appliquent à des citernes de production.

## § 10

Le mécanisme décrit ci-dessus vient simplement préciser des images usuelles en économie, telles que celles auxquelles correspondent les expressions de

(1) *The Graphic Representation of Supply and Demand*, Grant's recess studies, p. 151.

« marge », « niveaux de prix », « plans » de demande (et d'offre) et l'idée que « une offre abondante met le bien « à la portée » des consommateurs ».

La conception d'une citerne d'utilité est également naturelle. Adam Smith dit : « La demande d'aliments est limitée par la capacité d'un estomac d'homme ». Non seulement il y a là une limite, mais la demande d'aliments a des intensités variant suivant le degré auquel l'estomac est rempli. L'homme économique doit être considéré comme un ensemble de citernes ou d'estomacs relatifs chacun à un bien particulier.

## CHAPITRE III

### Un consommateur (ou un producteur). — Plusieurs biens.

#### § I

Le problème auquel nous arrivons maintenant est celui de la répartition du revenu d'un individu entre tous les biens figurant sur le marché.

Pour déterminer combien il prendra d'un article donné, celui qui dépense son revenu se préoccupe non seulement du prix de cet article, mais aussi des avantages qu'offrirait l'affectation de la même monnaie à l'acquisition d'autres choses.

La conséquence de ce fait au point de vue du mécanisme décrit au chapitre II trouve son expression dans l'utilité de la monnaie (1).

(1) Cette sorte d'interaction, particulièrement lorsqu'elle s'étend à plusieurs consommateurs et à plusieurs biens (comme dans le chapitre suivant), présente les plus grandes difficultés d'analyse pour Auspitz et Lieben ; à la p. 63 dans le § 16 ils disent : « Welche Aenderung eine Einzelkurve erleidet wenn sich die Vermögensverhältnisse des betreffenden Individuums ändert, lässt sich im allgemeinen nicht verfolgen. Wenn auch in der Regel die Ordinaten der Kurven länger werden, wenn das Individuum wolhabender wird, so wird dies doch keineswegs gleichmässig der Fall sein, vollends nicht, wenn wir verschiedene Artikel betrachten. » (On ne peut, en principe, se rendre compte des modifications subies par une courbe in-

Dans le chapitre précédent, alors que le prix variait en fonction de la quantité de bien, chaque évaluation individuelle ou utilité marginale de la monnaie fut regardée comme constante. Cela est sensiblement exact quand on ne prend en considération qu'un *seul bien*. Dans le présent chapitre au contraire, l'évaluation individuelle de la monnaie varie en fonction du montant du revenu en monnaie, mais les prix de tous les biens sont regardés comme constants. Cela est sensiblement exact quand on ne prend en considération qu'un *seul individu*.

### § 2

Supposons que l'individu I répartisse son revenu entre les biens A, B, C, ... M. Supposons que l'épaisseur de chaque citerne sur la figure 6 soit proportionnelle au prix du bien qu'elle contient. Ainsi, si A vaut \$ 2 par yard, B \$ 1 par gallon et C \$  $\frac{1}{2}$  par livre, l'épaisseur de la citerne A est 2, celle de B, 1 et celle de C,  $\frac{1}{2}$ .

Supposons que l'unité d'aire sur la face avant de chaque citerne représente une unité du bien, yards pour A, gallons pour B, etc.

Le volume du liquide indiquera alors évidemment la valeur-monnaie du bien, car il est égal à l'aire de la face antérieure de la citerne multipliée par son épaisseur, c'est-à-dire à la quantité du bien multipliée par

individuelle lorsque varie la situation de fortune de l'individu observé. Bien qu'en général les ordonnées des courbes soient plus longues lorsque l'individu est plus riche, il n'en sera jamais de même d'une manière uniforme, si nous considérons des articles différents. (Trad. franç., p. 41))

son prix. De plus, la quantité totale de l'eau indiquera le revenu global (1) en dollars. L'unité de volume représente, dans chaque cas, non pas un yard, un gallon,

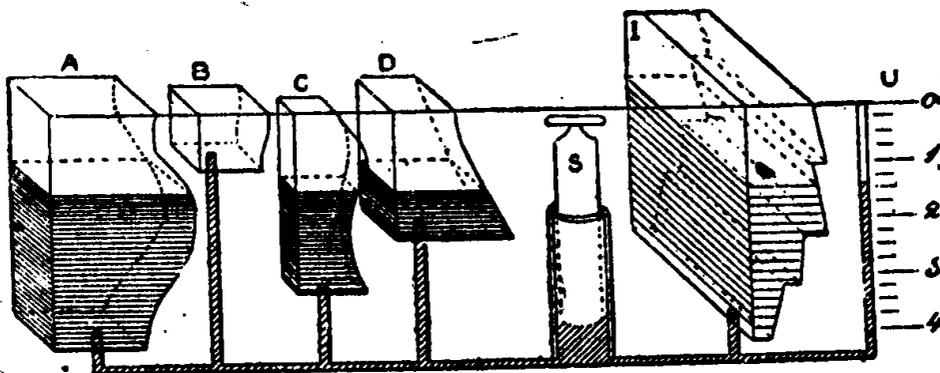


Fig. 6.

une livre, etc., mais un *dollar du bien*. Pour A ce serait  $\frac{1}{2}$  yard, pour B, 1 gallon, pour C, 2 livres, etc.

Supposons en conséquence que les courbes qui limitent les citernes soient construites de telle sorte que les ordonnées représentent l'utilité marginale par *dollar du bien* et non par yard, gallon, etc.

### § 3

Le liquide se mettra de niveau conformément à la proposition économique : *Un consommateur règle sa consommation de manière que l'utilité marginale par dollar soit la même pour tous les biens.*

Cela résulte de ce que si l'individu voulait modifier

(1) L'épargne est considérée ici comme une forme de dépense, le bien acheté étant le capital. L'analyse implique que l'utilité marginale correspondant à l'épargne d'un dollar égale l'utilité marginale du dollar dans le cas où on en ferait un autre usage. Ce point serait envisagé différemment dans une théorie de la répartition. Cf. LAUNHARDT, *Volkswirtschaftslehre*; BÖHM-BAWERK, *Kapital und Kapitalzins*.

sa consommation en partant d'une telle répartition en appliquant un dollar de plus à A, il en prélèverait le montant sur un ou plusieurs autres articles, sur B par exemple. Et alors le niveau dans la citerne A serait plus élevé que dans la citerne B, ce qui signifie que le dollar appliqué à A aurait moins d'utilité que s'il avait été consacré à B.

Si l'on enfonce le tampon, i. e. si l'individu disposait d'un plus grand revenu, l'évaluation du dernier dollar de chaque bien décroît ou, en d'autres termes, l'utilité marginale de la monnaie décroît. Si elle s'abaisse jusqu'à l'utilité marginale de B, l'individu commence à étendre ses achats à B. Dans les conditions représentées sur la figure, il « ne peut se le permettre ».

Le montant de la dépense relative à un bien particulier dépend du niveau général de l'eau, i. e. de l'évaluation d'un dollar, en même temps que inversement l'évaluation de la monnaie dépend du montant de la dépense totale à affecter à tous les biens.

Trois conditions suffisent à déterminer la répartition : 1° celle qui résulte des formes des citernes; 2° la condition que le revenu global ait un montant déterminé; 3° l'uniformité de l'utilité marginale (par dollar) pour tous les biens.

#### § 4. — Interprétation analytique.

Soit A, B, C, ... M les quantités (inconnues) de divers biens consommées par I, et  $\frac{dU}{dA}$ , ...  $\frac{dU}{dM}$  leurs utilités marginales (inconnues). Soit  $p_a$ ,  $p_b$ ,  $p_m$ , ... leurs prix (connus).

Les trois conditions ci-dessus deviennent alors :

(L'unité de bien est le dollar)

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dU}{dA} = F(A) \\ \frac{dU}{dB} = F(B) \\ \dots \\ \frac{dU}{dM} = F(M) \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ équations.} \\ 2m \text{ inconnues.} \end{array}$$

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} Ap_a + Bp_b + \dots + Mp_m = K \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \text{ équation.} \\ \text{aucune nouvelle inconnue.} \end{array}$$

(L'unité de bien est le dollar)

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dU}{dA} = \frac{dU}{dB} = \dots = \frac{dU}{dM} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m - 1 \text{ équations indépendantes.} \\ \text{aucune nouvelle inconnue.} \end{array}$$

Nombre des équations =  $m + 1 + m - 1 = 2m$ .

Nombre des inconnues =  $2m + 0 + 0 = 2m$ .

Le système est donc déterminé.

### § 5. — Totalité du revenu.

Soit I (*fig. 6*) la courbe moyenne (1) de toutes les

(1) Dans ce cas la moyenne n'est pas une simple moyenne arithmétique, mais une moyenne *pondérée*. On prend des *points de même utilité* sur les courbes composantes, c'est-à-dire des points d'égalles ordonnées. On fait la moyenne de leurs abscisses en multipliant chacune d'elles par le rapport de l'épaisseur de la citerne correspondante à celle de la citerne résultante (à savoir : la somme des épaisseurs des citernes primitives). Ainsi, si les épaisseurs sont  $p_a, p_b, \dots, p_m$  et les abscisses  $x_a, x_b, \dots, x_m$ , l'épaisseur et l'abscisse résultantes (P et X) sont :

$$P = p_a + p_b + \dots + p_m$$

$$X = \frac{x_a p_a + x_b p_b + \dots + x_m p_m}{p_a + p_b + \dots + p_m}$$

Si dans une citerne ainsi constituée le liquide pénètre jusqu'au

courbes des divers biens A, B, C, ... M, et attribuons à la nouvelle citerne une épaisseur égale à la somme des épaisseurs des citernes primitives. La quantité d'eau contenue dans la citerne résultante est alors égale à la somme de celles qui sont contenues dans les composantes.

Le liquide contenu dans cette nouvelle citerne représente l'ensemble de la monnaie prise en considération, et l'ordonnée l'utilité du dernier dollar.

Si ce revenu croît, son utilité marginale décroît et décroît suivant une loi dont les rapports avec les lois d'utilité relatives aux divers biens sont mis en évidence par les rapports entre la citerne résultante et les citernes composantes.

### § 6.

Des développements analogues s'appliquent à la figure 7. Au lieu d'envisager un revenu donné, il faut imaginer qu'une somme de dépenses donnée est entraînée par la production de différents biens (1). Et

niveau des citernes composantes, la quantité de liquide contenue dans la citerne résultante est égale à la somme des quantités contenues dans les composantes. En effet la somme des surfaces libres des citernes composante est

$$x_a p_a + x_b p_b + \dots + x_m p_m$$

et la surface libre de la résultante est

$$(p_a + p_b + \dots + p_m) \cdot \left( \frac{x_a p_a + x_b p_b + \dots + x_m p_m}{p_a + p_b + \dots + p_m} \right)$$

Ces deux expressions étant égales et cette égalité subsistant pour des couches infinitésimales à la surface libre et de proche en proche à tous les niveaux, il en est de même pour les sommes de ces couches.

(1) L'emprunt d'un capital doit être regardé ici comme une forme de production. La désutilité de l'emprunt du dernier dollar est égale à la désutilité de la production du dernier dollar de marchandise. Voir note au § 2.

c'est là que surgit une importante différence entre la production et la consommation, à savoir : dans la

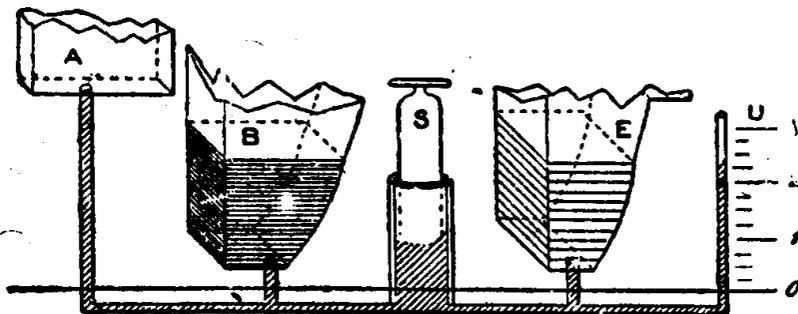


Fig. 7.

vie civilisée les hommes trouvent avantage à consommer *beaucoup* de choses et à en produire *peu*. L'examen de cette différence se rattache à la Partie II.

## CHAPITRE IV

**M Biens. — N Consommateurs (ou producteurs).**

### § 1

Nous avons examiné les lois de la répartition des biens à deux points de vue, en restreignant notre étude d'abord à un seul bien à la disposition de plusieurs consommateurs, et ensuite à un seul consommateur en présence de plusieurs biens. Notre étude est comparable à la vision qu'aurait d'une grande ville un touriste qui jetterait tout d'abord un coup d'œil sur chaque rue rencontrée tant à l'est qu'à l'ouest en parcourant une même avenue, puis reprenant ensuite « en croix » sa course à travers la ville, considérerait alors chaque avenue à partir d'une seule rue. Il nous faut maintenant rechercher une vue à vol d'oiseau.

Les variables que nous avons rencontrées ainsi que leurs variations sont relativement simples. Mais les variations qui peuvent se produire dans le cas le plus général sont si compliquées, que l'on peut difficilement les saisir ou les exposer sans l'aide d'un mécanisme.

## § 2

Avant tout, un exposé analytique va permettre de grouper sous un même point de vue les deux études précédentes.

Dans tout achat le dernier élément infinitésimal de bien acquis a une utilité égale à celle de la monnaie donnée en échange, c'est-à-dire que :

$$\text{ut. de } dA = \text{ut. de } dm$$

$$\text{ou : } \frac{dU}{dA} \cdot dA = \frac{dU}{dm} \cdot dm \text{ (voir ch. 1, § 3.)}$$

$$\text{ou : } \frac{dU}{dA} = \frac{dU}{dm} \cdot \frac{dm}{dA}$$

$$\text{ou : } \frac{dU}{dA} = \frac{dU}{dm} \cdot p_a$$

$p_a$  étant le prix en monnaie.

En d'autres termes, l'utilité marginale d'un bien (par livre, yard, etc.) est égale à l'utilité marginale de la monnaie (par dollar) multipliée par le rapport d'échange de la monnaie contre le bien.

Cette équation est fondamentale. Dans notre première étude (un bien, divers consommateurs), l'utilité marginale de la monnaie était supposée constante, de sorte que

$$\frac{dU}{dA} \approx p_a$$

ou que l'utilité marginale d'un bien est mesurée par son prix.

Dans la seconde étude, l'autre facteur, le prix, était supposé constant, de sorte que

$$\frac{dU}{dA} \approx \frac{dU}{dm}$$

ou que l'utilité marginale est mesurée par l'évaluation de la monnaie.

### § 3

Dans le présent chapitre nous ne nous sommes limité ni à l'une ni à l'autre de ces hypothèses particulières. Pour l'individu I nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dA_1} &= \frac{dU}{dm_1} \cdot p_a \\ \frac{dU}{dB_1} &= \frac{dU}{dm_1} \cdot p_b \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dU}{dM_1} &= \frac{dU}{dm_1} \cdot p_m \end{aligned}$$

d'où, puisque l'utilité marginale de la monnaie pour I est la même dans tous les cas :

$$\frac{dU}{dA_1} : \frac{dU}{dB_1} : \dots : \frac{dU}{dM_1} = p_a : p_b : \dots : p_m$$

Cela étant vrai pour chaque individu et les prix étant les mêmes pour tous les individus, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} p_a : p_b : \dots : p_m &= \frac{dU}{dA_1} : \frac{dU}{dB_1} : \dots : \frac{dU}{dM_1} \\ &= \frac{dU}{dA_2} : \frac{dU}{dB_2} : \dots : \frac{dU}{dM_2} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &= \frac{dU}{dA_n} : \frac{dU}{dB_n} : \dots : \frac{dU}{dM_n} \end{aligned}$$

Ces équations sont l'expression la plus générale de la théorie des utilités marginales dans leurs rapports

avec les prix. Cette théorie ne s'énonce pas, comme on l'a dit parfois : « les utilités marginales de tous les articles pour un même individu sont égales », encore moins : « les utilités marginales d'un même article pour tous les consommateurs sont égales », mais : *Les utilités marginales de tous les articles consommés par un individu donné sont proportionnelles aux utilités marginales de la même série d'articles pour tout autre consommateur, et ce rapport continu uniforme est l'échelle des prix de ces articles.*

L'idée d'égalité est inadéquate et doit être remplacée par l'idée de *proportionnalité*. On doit donc se représenter le problème qui s'offre à l'individu comme consistant pour lui à régler sa consommation des divers biens, de telle sorte que les utilités de la dernière livre, du dernier yard, du dernier gallon, etc., soient dans le rapport où il trouve leurs prix, cependant que le marché dans son ensemble doit aboutir à la formation de prix tels qu'il soit possible à l'individu de solutionner ce problème tout en absorbant exactement l'offre.

#### § 4

Cette idée d'un rapport est incorporée dans le mécanisme plus compliqué suivant (*fig. 8*). La figure 9 (une élévation de la *fig. 8*) montre les diverses citernes des divers biens pour l'individu I. Les ordonnées représentent l'utilité marginale *par unité de bien*. Elle correspond à la figure 6, sauf que dans cette dernière il s'agit de l'utilité *par dollar* de bien. Les surfaces des citernes ne sont plus au même niveau. Les citernes flottent maintenant comme des bateaux sur un bassin (1) et sont libres de se mouvoir dans la direction

(1) Bien entendu le niveau de l'eau dans chaque citerne est le même que dans le bassin. La seule cause permanente de dénivella-

verticale seulement (grâce à un dispositif télescopique placé en dessous et invisible sur le croquis).

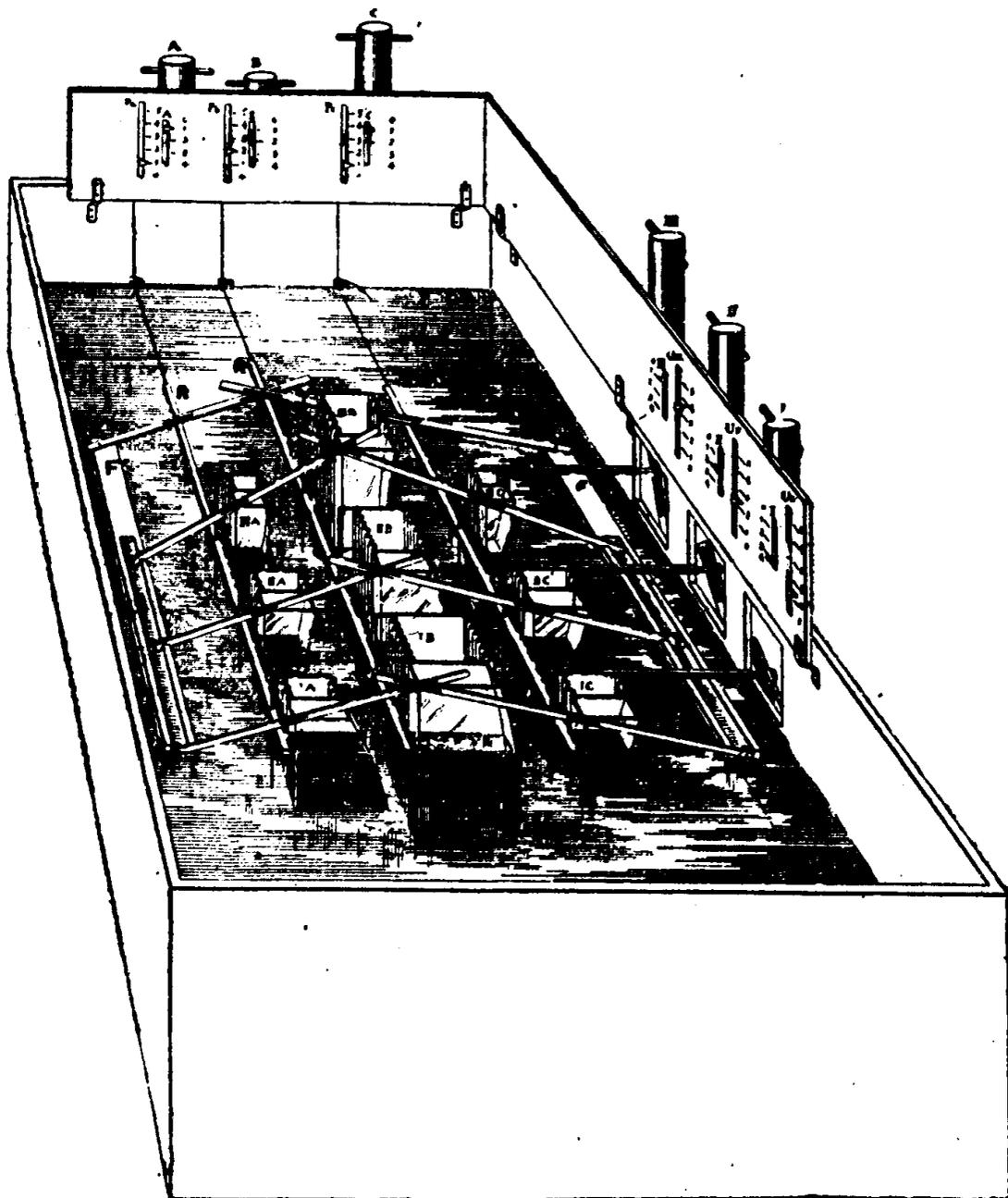


Fig. 8.

tion est la *différence* entre le poids de la citerne entière et celui de l'eau déplacée par ses parois (faites partiellement en bois), différence légère, qui peut être positive ou négative, et qui se traduit par l'excédent ou le déficit de poids correspondant à l'eau située dans la citerne au-dessus ou au-dessous du niveau extérieur.

Un coup d'œil sur la figure 8 ou sur la figure 10 (un

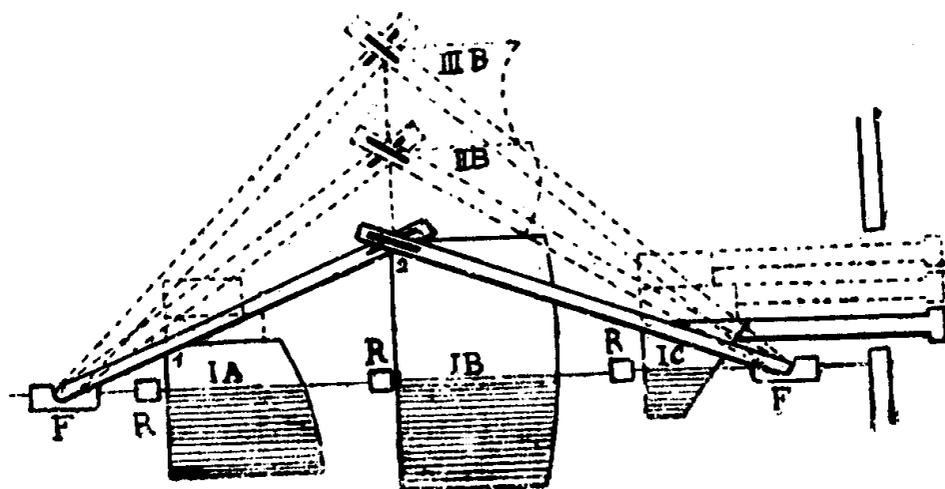


Fig. 9.

plan de la fig. 8) permettra de se rendre compte que toute rangée de citernes (de gauche à droite) se rapporte à un seul et même individu et correspond à la figure 6, et que toute file (d'avant en arrière) se rapporte à un seul et même bien et correspond à la figure 4.

L'eau contenue dans les citernes doit être assujettie à deux séries de conditions ; premièrement : la somme de tous les contenus de IA,

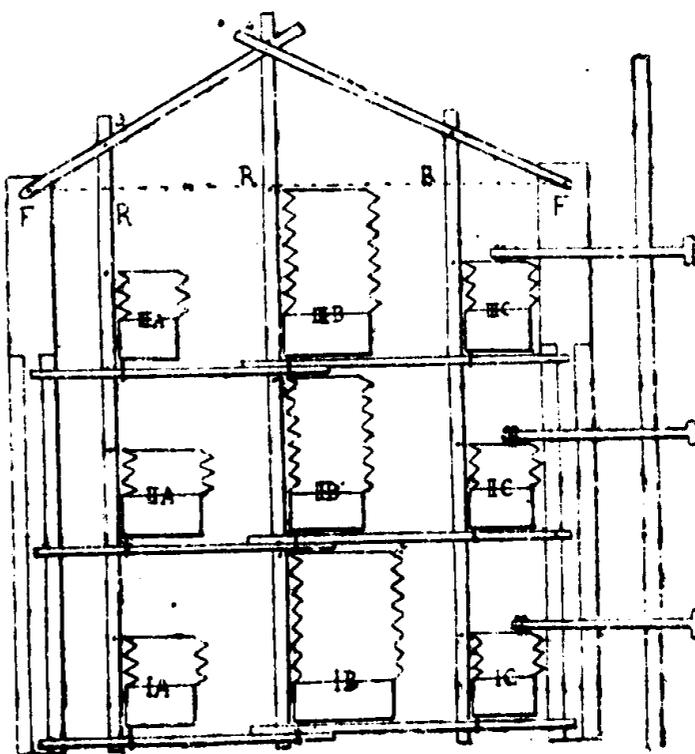


Fig. 10.

IIA, IIIA, etc. doit avoir une valeur donnée (à savoir : celle qui représente la quantité totale de bien A con-

sommée au cours de la période donnée), et il en va de même pour la file B, pour la file C, etc. ; secondement : la somme de tous les contenus de IA, IB, IC., etc., multipliés chacun par un coefficient (le prix de A, de B, de C, etc.) doit avoir une valeur donnée (à savoir : celle qui représente le revenu total de I au cours de la période donnée), et il en va de même pour la rangée II, pour la rangée III, etc.

Pour satisfaire à ces deux séries de conditions, chaque citerne est divisée en deux par une séparation verticale en bois. Les compartiments antérieurs ont tous une unité d'épaisseur, un pouce (par exemple). Tous les compartiments antérieurs appartenant à une même file sont reliés entre eux par des tuyaux (placés dans le bassin mais sans communication avec l'eau de ce bassin), qui assurent ainsi la réalisation de la première série de conditions.

L'épaisseur des compartiments postérieurs est variable, mais (comme on le verra bientôt) assujettie à être toujours égale au prix ; ainsi, si le prix de A est \$ 1 celui de B de \$ 3, et celui de C de \$ 1,20, l'épaisseur de toutes les citernes de la file A sera de 1, de la file B de 3 et de la file C de 1,20 (pouces).

L'épaisseur de chaque compartiment antérieur étant l'unité, le contenu de chaque compartiment postérieur est égal au contenu du compartiment antérieur multiplié par le nombre de pouces d'épaisseur de la citerne postérieure, c'est-à-dire que le compartiment postérieur contient un volume d'eau égal à la quantité du bien multipliée par son prix. Il contient par conséquent la *valeur-monnaie* du bien. La double citerne correspond au double aspect sous lequel on considère ordinairement chaque bien — tant de livres, de yards, etc., et tant d'éléments d'un dollar.

Tous les compartiments postérieurs d'une même

rangée sont reliés entre eux par des tuyaux — c'est-à-dire que la somme de leurs contenus a une valeur donnée — qui assurent ainsi la réalisation de la seconde série de conditions.

Les compartiments postérieurs peuvent changer d'épaisseur, leurs parois de droite, de gauche et du fond étant en cuir flexible ; le plan de la face postérieure est maintenu parallèle à la séparation en bois par deux doubles « règles parallèles » non marquées sur le croquis.

Il reste à décrire l'agencement des leviers. La raison d'être de ces leviers est de maintenir le rapport continu des utilités marginales identiques pour tous les individus et égal au rapport des prix.

Il y a en premier lieu un système de leviers obliques (1) (F12, etc., *fig. 9*) rattachés par des pivots à coulisse aux bords supérieurs des citernes et ayant leurs extrémités inférieures fixées par des charnières à des flotteurs en bois F, les charnières étant placées au niveau de l'eau dans le bassin. Ces flotteurs ne peuvent subir que de déplacements latéraux. Il résulte de la similitude des triangles FR1 et FR2 sur la figure 9 que les ordonnées des deux citernes IA et IB sont proportionnelles aux distances des règles relatives à A et à B, R et R, à la charnière placée sur le flotteur de gauche F. De même dans la rangée suivante, les ordonnées sont proportionnelles aux mêmes distances. Les quatre ordonnées sont donc proportionnelles les

(1) On peut obtenir un angle pratique pour chaque levier en choisissant judicieusement l'unité de chaque bien. Ainsi, si l'utilité marginale *par livre* conduit à des ordonnées qui ne soient pas pratiques dans la file A, il n'y a qu'à reconstruire les citernes de cette file de manière à avoir des ordonnées plus longues représentant l'utilité marginale par tonne ou plus courtes la représentant par once.

unes aux autres, et, en général, toutes les ordonnées de la rangée antérieure sont proportionnelles à celles de la rangée qui vient immédiatement après, ainsi qu'à celles de la rangée suivante, et ainsi de suite. En se souvenant que chaque ordonnée représente une utilité marginale, nous avons :

$$\frac{dU}{dA_1} : \frac{dU}{dB_1} : \dots = \frac{dU}{dA_2} : \frac{dU}{dB_2} : \dots = \frac{dU}{dA_3} : \frac{dU}{dB_3} : \dots = \dots$$

ce qui est l'expression de la condition de proportionnalité des utilités marginales qui doit être satisfaite (§ 3).

En second lieu, il y a des leviers horizontaux placés sur la surface de l'eau du bassin. Ces leviers se rapportent aux prix. Des pivots à coulisse 3, 4, etc. les rattachent aux règles RRR qui sont à leur tour rattachées par des tiges verticales aux parois postérieures des citernes. Un déplacement de l'une de ces règles provoque l'élargissement ou le rétrécissement à l'unisson de tous les compartiments postérieurs de la file correspondante. Les pivots 3, 4, etc. sont placés sur ces règles de telle sorte que si les leviers F 34, etc. prennent une position transversale suivant la ligne pointillée FF, les compartiments postérieurs de toutes les citernes sont complètement fermés. Par suite, R 3 est égal à l'épaisseur de chaque compartiment postérieur de la file A, R 4 à l'épaisseur correspondante dans la file B, et ainsi de suite.

D'après les triangles semblables FR3 et FR4 sur la figure 10, il est clair que les segments R 3 et R 4 et, par conséquent, les épaisseurs des compartiments d'arrière des files A et B sont proportionnels aux distances des règles relatives à A et à B, RR, au flotteur F. Mais nous venons de voir que les ordonnées de IA et de IB sont proportionnelles aux mêmes distances. Nous sommes donc en droit d'appeler l'épaisseur de chaque compar-

timent postérieur, le prix en monnaie (1) du bien auquel cette citerne correspond.

Il convient de remarquer que les citernes ne peuvent se déplacer que *verticalement*, les règles et les parois postérieures des citernes qu'*en avant et en arrière*, et les flotteurs en bois qu'*à droite et à gauche*, cependant que les leviers prennent telles positions auxquelles les contraint le mécanisme.

### § 5

Supposons que l'on ait introduit les quantités d'eau données dans chaque file de citernes antérieures et dans

(1) La monnaie n'est utilisée ici qu'à titre de mesure de la valeur. Ce n'est pas l'un des biens figurant sur le marché. La cherté ou le bon marché des biens en fonction de cette monnaie est entièrement dans la dépendance du montant de ce que nous convenons de dénommer la consommation annuelle du marché, c'est-à-dire de la quantité de liquide contenue au début dans les citernes postérieures. Nous sommes tellement habitués à considérer la monnaie comme un élément d'échange, et par conséquent comme un bien, qu'il peut nous échapper qu'il soit possible d'avoir une mesure de la valeur qui ne soit en aucune manière un bien. Ainsi, nous pourrions convenir d'appeler la consommation des Etats-Unis par an \$ 10.000.000.000, et cette convention déterminerait immédiatement une mesure de la valeur sans que le nouveau dollar soit égal ni au dollar or ni au dollar argent. Il serait facile d'établir une correspondance entre un étalon arbitraire de ce genre et un étalon en bien. Ainsi, si d'après la statistique la consommation mesurée en dollars or était de \$ 12.000.000.000, l'étalon conventionnel serait dans le rapport de 1,20 avec l'étalon or, et au moyen de ce facteur nous pourrions transformer les prix de tous les biens. Dans le mécanisme la quantité totale de liquide contenue dans les citernes postérieures correspond aux \$ 10.000.000 000. Si nous la considérons comme telle et que la quantité de liquide contenue dans la rangée I soit dite représenter \$ 1.000, cela signifie que (avec n'importe quel étalon) la consommation de I a la valeur de la dix-millionième partie de la consommation totale.

chaque rangée de citernes postérieures. Le système prendra une position d'équilibre stable, et le niveau de l'eau dans chaque citerne sera celui du bassin.

Les citernes antérieures de chaque file ont nécessairement un niveau uniforme du fait de leur intercommunication. Les citernes postérieures de chaque rangée présentent nécessairement un niveau uniforme pour une raison similaire. Les parois mobiles permettent à la pression de l'eau extérieure contenue dans le bassin de réaliser dans les citernes postérieures le même niveau que dans les citernes antérieures. Indépendamment de l'action des leviers, le niveau de l'eau dans toutes les citernes serait donc le même que dans le bassin ; mais il serait possible de régler le nombre de façons différentes les positions verticales de celles-ci et les épaisseurs de leurs compartiments d'arrière. Les leviers viennent simplement préciser ou déterminer ce réglage.

### § 6

Peut-être est-il nécessaire de redire avec soin quelles sont les grandeurs, leurs unités et les conditions qui les déterminent. Les grandeurs sont :

1. *Les quantités de chaque bien consommées par chaque individu au cours de l'année.* Elles sont représentées par les quantités d'eau contenues dans chaque compartiment antérieur.

2. *Les quantités totales données de chaque bien consommées par l'ensemble du marché* — représentées par le volume d'eau invariable contenu dans chaque file de compartiments antérieurs et *repérées sur des échelles* (1) *A, B, C*, à l'arrière du bassin.

(1) Les tampons A, B, C règlent ce volume d'eau. Chacun d'eux est rattaché directement aux repères des échelles A, B, C et disposé

3. *La monnaie versée par chaque individu pour chaque bien* — représentée par l'eau contenue dans chaque compartiment postérieur.

4. *Le revenu total en monnaie de chaque individu* — représenté par le volume d'eau invariable contenu dans chaque rangée de compartiments postérieurs et repéré sur des échelles (1) I, II, III, à la droite du bassin.

5. *L'utilité marginale de chaque bien pour chaque individu* — représentée par l'ordonnée de chaque citerne, i. e. par la distance de son bord supérieur à la surface de l'eau.

6. *Le prix en monnaie de chaque bien* — représenté (à une quelconque des citernes de la même file) par l'épaisseur du compartiment postérieur et repéré sur des échelles (2)  $p_a, p_b, p_c$ , à l'arrière.

7. *Les prix des biens évalués l'un par rapport à l'autre* — représentés par les rapports des ordonnées correspondantes.

8. *L'utilité marginale de la monnaie pour chaque individu* — représentée (à une quelconque des citernes de la même rangée) par le rapport (3) de l'ordonnée de cette citerne à l'épaisseur de son compartiment postérieur et repéré sur des échelles (4) UI, UII, UIII, à droite.

de manière que lorsqu'il est dégagé de telle sorte que l'échelle marque zéro, l'eau disparaît entièrement des citernes.

(1) Les tampons I, II, III sont également rattachés directement aux index des échelles I, II, III.

(2) Chacune des règles RRR est reliée, par l'intermédiaire d'une corde et d'une poulie, à l'index de l'une des échelles  $p_a, p_b, p_c$ .

(3) Ce rapport est évidemment l'utilité marginale de la monnaie (« évaluation de la monnaie ») puisque, comme on l'a vu au cha-

pitre IV, § 2, 
$$\frac{dU}{dA} = \frac{dU}{dm} \cdot p_a$$

d'où : 
$$\frac{dU}{dm} = \frac{\frac{dU}{dA}}{p_a} = \frac{\text{ordonnée d'une citerne}}{\text{épaisseur de son compartiment postérieur.}}$$

(4) La figure 11 (qui représente la face extérieure de la paroi

Les unités de ces grandeurs sont :

1. L'unité de bien est une *tonne*, un *yard*, un *gallon*, etc., et est représentée (par exemple) par un *pouce cube* d'eau.

2. L'unité de monnaie est (par exemple) un *dollar*, et est représentée (par exemple) par un *pouce cube* d'eau.

3. L'unité de prix est un dollar par tonne, yard, gallon, etc., et est représentée par un pouce.

4. L'unité d'utilité marginale pour chaque individu est l'utilité marginale de (par exemple) 100 tonnes de A. On peut l'appeler un *util*, et par un réglage convenable de la largeur de

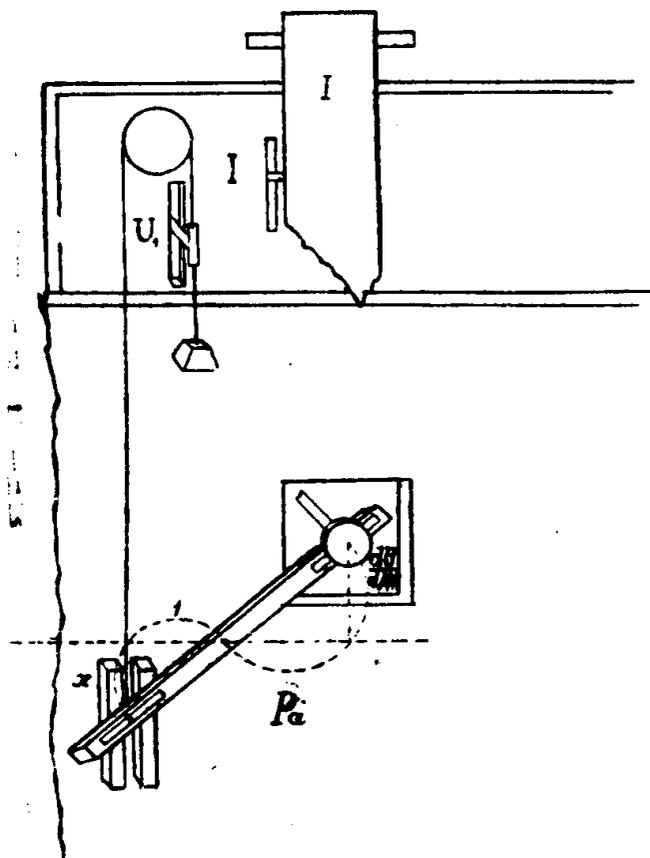


Fig. 11.

chaque citerne, on peut la représenter par un *pouce*. A cet effet, si 100 pouces cubes d'eau sont introduits dans chacune des citernes A, leur ordonnée doit être

droite du bassin) montre le dispositif permettant d'obtenir ce résultat. Il résulte immédiatement des inscriptions que porte cette figure que :

$$x = \frac{dU}{dA} \text{ ou } x = \frac{dU}{dm}$$

Le repère enregistre évidemment les variations de  $x$ . Il est réglé de telle sorte qu'il marque zéro quand  $x = 0$ .

d'un pouce. Il peut en être ainsi également pour l'utilité de la monnaie, de telle sorte que l'échelle U à gauche indique le nombre d'*utils* auquel l'individu évalue le dernier dollar de son revenu. Il faut, toutefois, noter que la variation du nombre d'*utils* n'a d'intérêt que sur un même registre, c'est-à-dire pour un même individu. Il n'y a aucun enseignement important à dégager de la comparaison des échelles fournissant U pour deux individus différents. Si celle qui est relative à I donne 1 et celle qui est relative à II, 2, cela indique simplement que II apprécie son dernier dollar deux fois autant que sa 100<sup>m</sup> tonne de A, tandis que I apprécie son dernier dollar juste autant que sa dernière tonne de A. Il est intéressant d'observer que, de façon analogue, les registres donnant les prix ne sont pas comparables, car tandis que l'un indique le prix par tonne, l'autre indique le prix par yard, etc. Ainsi le mécanisme n'implique pas l'existence d'une commune mesure de l'utilité pour des individus différents ni d'une commune mesure des prix pour des biens différents.

### § 7

On observera que les nombres marqués sur les divers registres se groupent de telle sorte que le produit du nombre marqué sur la graduation de A par le prix correspondant ajouté aux mêmes produits relatifs à B, C, etc. sera égal à la somme des nombres marqués sur toutes les graduations donnant les revenus.

En outre, si chaque citerne est pourvue d'une graduation pour indiquer l'utilité, le nombre marqué se trouvera être le produit du nombre représentant le prix correspondant à la file comprenant cette citerne par le nombre représentant l'évaluation de la monnaie correspondant à la rangée.

## § 8

Le mécanisme qui vient d'être décrit est l'analogie matériel du marché économique idéal. Il représente, chacun dans son rôle exact, les éléments qui contribuent à la détermination des prix et les livre aux investigations de l'œil. Nous sommes ainsi à même non seulement de réaliser un clair *tableau* analytique de l'interdépendance des nombreux éléments de la formation des prix, mais aussi d'employer le mécanisme comme instrument d'investigation et de suivre, grâce à lui, certaines variations compliquées qui, sans son aide, seraient difficilement étudiées avec succès. Ses principales applications peuvent être rapidement classées comme suit :

1. Disposons les tampons I, II, III, etc. de telle sorte que les revenus en monnaie de I, II, III soient tous égaux. Les différences de répartition des biens dépendront des caractéristiques individuelles, c'est-à-dire, du type des citernes. Si toutes les citernes correspondant à A sont semblables et de même toutes les citernes correspondant à B, toutes les citernes correspondant à C, etc., chaque bien se répartira également entre les individus.

2. Enfonçons le tampon I. Cela revient à accroître le revenu de I. Ce n'accroît pas la quantité de biens figurant sur le marché, mais en attribue une plus large part à I. La valeur-monnaie totale du même ensemble de biens figurant sur le marché s'est accrue de la quantité de liquide ajoutée en abaissant le tampon.

L'eau ajoutée dans les citernes postérieures de la rangée I rendra les compartiments postérieurs de cette rangée plus pleins que les compartiments antérieurs. Le niveau arrière sera temporairement supérieur au

niveau de l'eau du bassin, et (comme les citernes s'enfonceront) le niveau antérieur sera temporairement inférieur. L'effet de la première différence de niveau est de faire écarter les parois mobiles d'arrière dans la rangée I, de faire reculer les règles et de produire le même écartement des compartiments postérieurs dans les rangées II, III, etc. De la sorte, dans ces rangées les niveaux du liquide dans les compartiments postérieurs sont inférieurs, et, dans les compartiments antérieurs, supérieurs à celui du bassin. Et alors les citernes antérieures des files II, III, etc., déversent une partie de leur contenu dans celles de la file I dont le niveau est, comme nous l'avons vu, inférieur à celui du bassin.

En langage économique, l'attribution à un individu d'une grande somme de monnaie a pour lui le résultat d'amoindrir les utilités marginales (enfouissement des citernes), d'abaisser l'utilité marginale de la monnaie et d'augmenter sa consommation de biens. Pour les autres individus elle accroît les utilités marginales (soulèvement des citernes), diminue leur consommation, élève les prix (expansion des citernes postérieures) et peut accroître ou amoindrir l'utilité marginale du revenu en monnaie de chacun d'eux, suivant que les utilités marginales (ordonnées) croissent plus rapidement que les prix (épaisseurs des compartiments postérieurs) ou inversement.

Il en va de même à l'égard des différents individus. Voyons maintenant ce qu'il est advenu des divers biens. En général les prix se sont élevés, mais il n'en est pas nécessairement ainsi pour tous les articles. Supposons que l'article C ne soit que peu ou pas du tout consommé (citerne étroite) par l'individu enrichi I, mais soit largement utilisé par ceux dont l'évaluation de la monnaie est accrue. Alors, étant donné que pour II l'évaluation de la monnaie est égale au quotient de

l'ordonnée de II C divisée par l'épaisseur de la citerne postérieure de II C, et que cette ordonnée ne s'est allongée qu'à raison d'une perte insensible de bien C subie par II au profit de I, l'épaisseur doit avoir diminué, c'est-à-dire que le prix s'est abaissé.

Non seulement il peut y avoir de tels biens exceptionnels, mais il peut y avoir aussi des individus exceptionnels. Ainsi un homme peut être justement le principal consommateur de ces biens dont les prix ont baissé, et de ceux-là seulement. Alors sa consommation croîtra, l'utilité marginale de la monnaie décroîtra pour lui. Il ne pâtit pas, il profite de l'accroissement du revenu de son voisin I.

3. Enfonçons le tampon I et soulevons le III. I, II, III représentent alors respectivement une opulente classe moyenne et un homme pauvre. Nous observons tout d'abord que ce changement oblige l'homme pauvre à renoncer complètement à certaines choses (biens de luxe) comme C, tout en restreignant légèrement son nécessaire; en second lieu, que l'homme riche accroît considérablement son luxe et légèrement son nécessaire, et, en troisième lieu, que de légères modifications se produiront dans les prix et, par suite, dans la consommation de la classe moyenne.

La nature de l'effet produit sur les prix dépend du type des citernes relatives à I et à III et de l'importance des changements subis par les revenus de I et de III. Pour que les prix puissent ne pas changer, une condition (nécessaire mais non suffisante) c'est que le supplément de revenu en monnaie accordé à I soit égal à la diminution subie par III, car si les quantités des biens ne doivent pas être changées ni leurs prix non plus, leurs valeurs totales ne peuvent l'être. Si tous les prix s'élèvent, cela prouve un accroissement du revenu en monnaie pour l'ensemble du système.

Si l'augmentation du revenu de I est égale à la diminution de celui de III, de telle sorte que la valeur-monnaie totale des biens figurant sur le marché soit inchangée, et que de plus toutes les citernes relatives à I et à III aient des parois verticales à leur droite et présentent des largeurs (1) proportionnelles, il ne se produira aucun changement de prix. En effet, si les largeurs des citernes de la rangée III sont respectivement moitié (par exemple) de leurs correspondantes dans la rangée I, l'équilibre sera évidemment assuré en réduisant chaque ordonnée de la rangée I dans un rapport uniforme (soit 10 0/0) et en augmentant celles de la rangée III exactement du double de la réduction apportée aux ordonnées I correspondantes. Il est clair que cela aura pour conséquence que l'allongement des ordonnées III soit uniforme (soit 15 0/0). Le rapport des utilités marginales a été ainsi maintenu et, par suite, les prix le sont également. Naturellement ce qui a été ajouté à IA est égal à ce qui a été prélevé sur IIIA, et l'équilibre se trouve rétabli par un simple transfert de III à I. Dans cette hypothèse il ne se produit pas de mo-

(1) La largeur d'une citerne est évidemment le quotient de la différentielle de son aire divisée par la différentielle de l'ordonnée, c'est-à-dire la *fluxion du bien par rapport à son utilité marginale*. C'est une grandeur importante dans l'étude de la répartition des biens. Introduisant ainsi la différentielle seconde de l'utilité, elle n'a pas d'expression parfaitement nette en langage courant. Une citerne étroite indique qu'une petite réduction de son contenu entraîne un accroissement considérable de son ordonnée, i.e. provoque un grand désir de ce contenu. L'individu est très *sensible* à une modification de la quantité de ce bien. Il en déplore une légère diminution et il en apprécie une légère augmentation. Inversement une citerne large est l'indice que l'homme ne se laisse pas facilement satisfaire par l'accroissement ou affecter par le décroissement de la quantité du bien en question. Ces deux sortes de citernes peuvent être appelées la « sensible » et l'« insensible » (Voir Appendice I).

dification pour II ou pour tout individu en dehors de I et de III.

Plus généralement, dans une nouvelle répartition des revenus sans modification de leur somme de manière que les prix puissent rester les mêmes : 1° aucune condition n'est à satisfaire par ceux dont les revenus n'ont pas changé ; 2° pour ceux dont les revenus ont changé, les citernes doivent être d'un type géométrique tel que pour l'ensemble des hommes devenus plus riches, à un raccourcissement proportionnel des ordonnées relatives à chacun d'eux corresponde au total un bénéfice en bien de chaque sorte équivalant à la perte subie au total par les hommes devenus plus pauvres du fait d'un allongement proportionnel des ordonnées correspondant à chacun d'eux.

Si l'homme ou les hommes enrichis absorbent d'un bien donné plus que cette quantité requise, les prix s'élèveront, s'ils en absorbent moins, ils s'abaisseront.

Si l'augmentation du revenu de I est égale à la diminution du revenu de III, les effets sur les prix doivent se compenser. Si l'un s'élève, l'autre ou les autres doivent s'abaisser. Si IA est beaucoup plus large que IIIA, mais IB beaucoup plus étroite que IIIB, le prix de A peut s'élever et celui de B s'abaisser sans que des actions contraires proviennent des autres biens. En effet, si nous supposons les prix inaltérés, la citerne IA absorberait du contenu de IIIA et la citerne IB du contenu de IIIB dans la mesure où l'ordonnée de IIIA serait trop longue et celle de IIIB trop courte pour la réalisation de l'équilibre. Pour permettre en partie cet allongement et ce raccourcissement, il doit se produire un allongement et un raccourcissement corrélatifs respectivement dans l'ensemble de la file A et dans celui de la file B, et les prix doivent être proportionnels aux ordonnées qui en résultent. Dans cette hypothèse il ya

lieu de noter en outre que la modification des prix entraîne celle de la répartition du revenu de II et de ceux de tous les autres individus.

L'utilité marginale de la monnaie décroît pour I, croît pour III et peut s'élever ou s'abaisser légèrement pour II par suite de la modification des prix. En adaptant convenablement les largeurs des citernes aux changements de prix, il peut ne se produire aucune modification (1) de l'évaluation de la monnaie pour II. Si le prix de A s'élève légèrement et que celui de B s'abaisse relativement plus, la largeur de IIA étant en outre

(1) Si les prix de deux biens seulement A et B sont modifiés et que AII et BII aient des parois verticales, et si les largeurs de ces citernes sont inversement proportionnelles aux différences des carrés des anciens et des nouveaux prix, il n'y aura alors rien de changé dans l'évaluation de la monnaie. En effet, soient  $p$  et  $p'$  l'ancien et le nouveau prix,  $x_a$  et  $x_b$  les largeurs des citernes de A et de B (relatives à II), et  $y_a$  et  $y_b$  et  $y'_a$  et  $y'_b$  leurs anciennes et nouvelles ordonnées. Etant donné que l'utilité marginale de la monnaie n'a pas changé, non plus que les prix de C, D, etc., les ordonnées et partant les quantités (relatives à II) ne peuvent changer. Par suite, la dépense supplémentaire affectée (par II) à A doit être égale à la réduction de dépense réalisée sur B, i. e. :

$$x_a y'_a p'_a - x_a y_a p_a = x_b y_b p_b - x_b y'_b p'_b$$

Mais puisque l'évaluation de la monnaie doit être maintenue constante,

$$\frac{y'_a}{p'_a} = \frac{y_a}{p_a} = \frac{y_b}{p_b} = \frac{y'_b}{p'_b} = k$$

Par suite  $x_a k p'^2_a - x_a k p^2_a = x_b k p^2_b - x_b k p'^2_b$

D'où  $x_a : x_b :: p^2_b - p'^2_b : p'^2_a - p^2_a$

ce qui est l'expression de la condition cherchée. Plus généralement, pour que l'évaluation de la monnaie pour un individu ne change pas, les citernes de II doivent être d'une forme telle que si la monnaie économisée sur certains articles est égale au surcroît de débours imposé par d'autres, les ordonnées puissent toutes varier proportionnellement aux prix. Si ces ordonnées croissent plus qu'il n'est ainsi requis, ou décroissent moins l'évaluation de la monnaie s'élèvera. Dans le cas contraire elle s'abaissera.

moindre que celle de IIB, l'évaluation de la monnaie pour II s'abaissera. En effet, s'il n'en était pas ainsi, les ordonnées de IIA et de IIB devraient alors varier *pari passu* avec les épaisseurs des citernes postérieures. L'épaisseur et l'ordonnée de IIA seraient, par exemple, accrues chacune de 10 0/0 et celles de IIB réduites de 50 0/0. Or il est clair qu'il n'y aurait pas de place dans IIA pour toute la monnaie provenant de IIB. Il y aura donc un surplus qui se répartira entre A, B, C, etc. et viendra réduire les ordonnées et l'évaluation de la monnaie relative à II.

Ces cas artificiellement précis correspondent assez exactement à des théorèmes économiques approximatifs plus généraux. Il ne se produit pas dans le monde réel de mises au point (ajustements) aussi délicates que celles que nous venons de rencontrer, mais à travers des cas idéaux nous étudions des tendances correspondant à la réalité.

4. Enfonçons le tampon A. Cela aura principalement pour effet de faire baisser le prix de A. Si ce bien est un bien de nécessité (1), une part relativement considérable de son accroissement reviendra au pauvre. Il arrivera vraisemblablement que tandis que la dépense totale consacrée par le pauvre à ce bien augmentera, celle du riche *diminuera* (2). L'utilité marginale de la

(1) Un bien de nécessité peut être défini : un bien dont la citerne est relativement profonde et étroite. En d'autres termes, c'est un bien dont une très petite quantité a une très grande utilité et dont un léger surcroît donne très rapidement satisfaction. Un bien de luxe jouit des propriétés inverses.

(2) Quand un bien *commence* à pénétrer dans une citerne, sa valeur-monnaie (le contenu de la citerne postérieure) croît à peu près dans la même proportion que la quantité — peu importe de combien le prix (l'épaisseur) diminue. *Vice versa* quand la citerne est presque pleine, une diminution de prix *réduit* la valeur-monnaie à peu près proportionnellement — l'accroissement de la quantité importe peu.

monnaie décroît en général surtout pour le pauvre.

Nombre d'autres biens hausseront de prix si A diminue de prix plus rapidement que n'augmente sa quantité. Il y aura en effet une économie réalisée sur A qui devra être employée par ailleurs. Mais il peut arriver qu'un bien particulier baisse de prix. Ainsi, si B ne se trouve être utilisé en grand (citernes profondes et larges) que par ceux qui utilisent peu A, ces personnes ne réaliseront aucune économie appréciable sur leurs dépenses relatives à A, mais seront obligées d'affecter beaucoup de monnaie à C, D, etc. dont les prix se sont élevés. Il en résultera une élévation de leur évaluation de la monnaie, et comme la quantité de B ne décroît pas, son prix doit le faire.

En outre, il se produira de légères modifications de toutes les autres quantités I B, II C, etc. Une diminution de II C (par exemple) peut provenir de deux causes : ou bien d'une élévation du prix de C ou bien d'une élévation de l'évaluation de la monnaie de II. En général l'évaluation de la monnaie décroîtra. Le décroissement sera relativement grand pour le pauvre en comparaison de ce qu'il sera pour le riche, mais (comme nous venons de le voir) il ne se produira pas nécessairement pour tout le monde.

Si A est un bien de luxe, la diminution de son prix sera relativement faible par rapport au cas précédent. La plus grande partie de l'augmentation de la quantité de A reviendra au plus riche. Le montant total de la dépense en monnaie affectée à ce bien *augmentera* vraisemblablement, ce qui amènera en général la diminution des prix d'autres articles. Il peut y avoir des exceptions analogues à celles rencontrées dans le premier

Le point de démarcation est situé à l'endroit où la quantité décroît dans le rapport où le prix croît. Ces phénomènes apparaissent plus nettement sur les graphiques de Auspitz et Lieben, p. 48, etc

cas. L'évaluation de la monnaie présentera en général une décroissance, maximum peut-être pour la classe moyenne et plus grande pour le riche que pour le pauvre, mais il n'en est pas nécessairement ainsi pour tous.

5. Le cas qui vient d'être examiné implique l'hypothèse que le supplément de production de A ne provoque aucune perturbation des revenus de I, II, III, etc. Pour figurer le cas où I *produit la totalité* de A, après avoir enfoncé A d'une quantité donnée, enfonçons I lentement jusqu'à ce que la *variation de revenu* enregistrée sur l'échelle I soit égale à l'indication finale de l'échelle A multipliée par le prix de A, diminuée du produit de la quantité précédente de A multipliée par le prix précédent.

Le principal changement qui en résultera pour un article portera sur le prix de A, qui décroîtra. Le principal changement qui en résultera pour une personne portera sur I, dont le revenu a augmenté (principalement si le bien en question est un bien de luxe), dont les dépenses auront augmenté pour nombre d'autres articles, mais pas nécessairement pour tous, et pour lequel l'évaluation de la monnaie aura diminué du fait tout à la fois de l'accroissement du revenu et de la diminution de prix des autres articles par suite du report sur A d'une partie de la monnaie qui leur était affectée. Seuls des articles exceptionnels augmenteront de prix si leurs principaux consommateurs *diminuent* suffisamment leurs dépenses en A.

Mais il peut arriver que l'augmentation de la quantité de A en déprécie tellement le prix que la valeur du total en *diminue*. Il en est généralement ainsi des biens de nécessité. Le producteur I verra alors disparaître une partie de son revenu, c'est-à-dire que le tampon I doit être soulevé au lieu d'être enfoncé. Son évaluation de la monnaie croîtra doublement du fait de la contrac-

tion de son revenu et de l'élévation des prix des autres articles. Les rentrées de monnaie (1) pour un tel bienfaiteur ne sont donc pas toujours proportionnelles à son bienfait. Si l'on connaissait exactement la répartition de l'ancienne et de la nouvelle production de A entre I, II, III, etc., la combinaison convenable des positions des tampons pourrait être déterminée, et les réactions, maintenant extrêmement compliquées, pourraient être observées.

6. Enfonçons chacun des tampons A, B, C, etc. Il y aura une baisse générale des prix. Mais il n'est pas vrai que si la quantité de chaque bien est doublée, son prix sera réduit de moitié et le prix de l'un des biens en un autre inaltéré, ainsi que le suppose Mill (2) à ce qu'il semble, car les rapports d'échange ne sont pas les rapports des contenus des citernes, mais ceux de leurs ordonnées. Les taux de répartition des biens ne resteront pas non plus les mêmes. Toutefois, si dans chaque file toutes les citernes sont géométriquement semblables et que les parties qui en sont remplies soient également semblables (hypothèse tout à fait imaginaire), les taux de répartition des biens resteront les mêmes (3), et si de plus toutes les citernes sont semblables, les rapports des prix demeureront inaltérés (4).

(1) Il n'est pas question ici des prix de monopole. Il est intéressant de noter que la C<sup>ie</sup> des Indes Orientales usa de la destruction d'une partie de ses épices pour prévenir une grande chute des prix. Les Japonais ont fait de même pour les œufs de vers à soie.

(2) *Pol. Econ.*, liv. III, ch. xiv, § 2.

(3) En effet, un accroissement proportionnel des contenus des citernes d'une même file provoque la réduction proportionnelle des ordonnées et le resserrement semblable des compartiments postérieurs, ce qui conduit au rétablissement de l'équilibre.

(4) Car en outre de ce qui précède, il faut observer que dans toutes les files la réduction des ordonnées sera semblable.

Dans le monde réel, à côté des différences de forme des citernes, il se produit des différences plus importantes à l'occasion du remplissage des citernes. Les citernes de biens de nécessité sont relativement plus pleines que celles de biens de luxe, et les citernes relatives aux riches, plus que celles relatives aux pauvres. Par suite, un accroissement proportionnel de la production de divers biens aura pour effet d'abaisser les prix des choses nécessaires beaucoup plus que ceux des choses de luxe.

Les effets produits sur l'évaluation ou sur l'utilité marginale de la monnaie sont plus compliqués. Si nous supposons qu'au début de leur enfoncement les tampons soient largement dégagés, ces effets peuvent être en gros décrits comme suit : l'évaluation de la monnaie commence par *croître*, puisque les prix décroissent plus vite (1) que les utilités marginales, elle atteint un maximum (qui est différent pour chaque individu et dépend de la répartition initiale) et se met à *décroître* lorsque le décroissement des ordonnées devient plus rapide que celui de l'épaisseur des citernes postérieures. Ces variations de l'évaluation de la monnaie sont soumises bien entendu à la condition que chaque revenu mesuré en monnaie reste le même.

7. Enfonçons proportionnellement tous les tampons relatifs aux revenus, i. e. augmentons tous les revenus dans le même rapport. Il n'y aura pas de changement dans la répartition des biens. Il en résulte simplement la dépréciation de l'étalon monétaire. Précédemment l'ensemble des biens figurant sur le marché

(1) Parce que quand la citerne est relativement vide, une ascension de la surface de son contenu ne diminue que dans un faible pourcentage l'ordonnée qui est longue, mais resserre très notablement le compartiment postérieur.

était considéré comme valant un certain nombre de dollars, maintenant ce nombre est devenu plus grand.

Nous avons vu au numéro 1 qu'un accroissement du revenu, évalué en monnaie, d'un seul individu sans qu'il se produise d'accroissement des quantités de biens, est pour lui une source d'avantages, mais un tel accroissement, lorsqu'il est général, ne présente d'avantages pour personne.

8. Retirons la citerne IA et remplaçons-la par une autre moins profonde, i. e. supposons une modification du goût de I pour A tel que cet article présente moins d'attrait pour lui.

C'est comme si nous soulevions le fond de la citerne primitive IA. Une plus grande quantité de A passera aux autres consommateurs et une plus grande quantité de la monnaie de I passera à l'acquisition des autres biens. A diminuera de prix, la plupart des autres articles augmenteront. L'évaluation de la monnaie de I s'abaissera. Pour ceux qui sont de gros consommateurs de A, l'évaluation de la monnaie s'abaissera. Pour les autres elle s'élèvera.

Si toutes les citernes relatives à I deviennent moins profondes, il se produira un abaissement de l'évaluation de la monnaie pour I, mais ou bien les prix ne subiront pas de changements, ou bien leurs changements se compenseront, car il n'en résulte aucune modification ni des quantités des biens ni de leurs valeurs totales. Si toutes les citernes de la rangée I subissent un changement tel que les ordonnées s'allongent dans une même proportion sans qu'aucun bien ne s'écoule en dehors d'une citerne, il ne *s'écoulera* aucun bien au dehors, aucun prix ne subira de changement et il n'y aura aucune modification dans la répartition des biens non plus que dans l'évaluation de la monnaie pour les autres personnes. Si une citerne vient à être réduite

plus qu'il ne convient, les conséquences en seront analogues à celles qui viennent d'être indiquées dans l'hypothèse d'une seule citerne.

Si l'on diminue la profondeur de toutes les citernes de la file A, le prix de A s'abaissera (1). Ceux des autres articles croîtront en général. Pour que la répartition des biens puisse ne pas changer, il faut que les citernes de A soient modifiées de manière à n'entraîner qu'un raccourcissement à un taux uniforme des ordonnées, sans perte ni gain de bien. Dans ce cas le prix de A diminuera cependant que ceux de tous les autres articles augmenteront exactement de même (2). L'évaluation de la monnaie sera réduite puisque l'ordonnée d'une citerne de B (par exemple) n'a pas changé alors que l'épaisseur de son compartiment postérieur a augmenté. Les modifications qui viennent d'être examinées peuvent se manifester si A devient subitement démodé.

Des modifications entièrement analogues se produisent si une citerne ou des citernes deviennent plus étroites. L'individu est alors plus vivement « sensible » aux changements de quantités. De tels changements peuvent survenir après une découverte à la suite de laquelle une petite quantité du bien devient « plus efficace » que précédemment.

Des modifications inverses se produisent si les citernes viennent à être élargies ou approfondies.

(1) Sans cela, étant donné que les ordonnées correspondant à A se raccourcissent et que leurs rapports avec les autres ordonnées s'amointrissent, les épaisseurs des citernes postérieures seraient trop grandes par rapport aux autres épaisseurs.

(2) Car leurs rapports mutuels ne peuvent changer puisque les ordonnées auxquelles ils sont proportionnels ne le font pas.



Les fonctions d'utilité (les formes des citernes) sont représentées par

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dU}{dA_1} = F(A_1); \frac{dU}{dB_1} = F(B_1); \dots; \frac{dU}{dM_1} = F(M_1) \\ \frac{dU}{dA_2} = F(A_2); \frac{dU}{dB_2} = F(B_2); \dots; \frac{dU}{dM_2} = F(M_2) \\ \dots \\ \frac{dU}{dA_n} = F(A_n); \frac{dU}{dB_n} = F(B_n); \dots; \frac{dU}{dM_n} = F(M_n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} mn \text{ équations.} \\ mn \text{ nouvelles} \\ \text{inconnues} \\ \text{(ut. marg.).} \end{array}$$

Le principe de proportionnalité s'exprime par :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dU}{dA_1} : \frac{dU}{dB_1} : \frac{dU}{dC_1} : \dots : \frac{dU}{dM_1} = \\ \frac{dU}{dA_2} : \frac{dU}{dB_2} : \dots : \frac{dU}{dM_2} = \\ \dots \\ \frac{dU}{dA_n} : \frac{dU}{dB_n} : \dots : \frac{dU}{dM_n} = p_a : p_b : p_c : \dots : p_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} n(m-1) \\ \text{équations indé-} \\ \text{pendantes.} \\ \text{aucune nouvelle} \\ \text{inconnue.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Nomb. total d'équations : } m + n + mn + n(m-1) = 2mn + m \\ \text{» des inconnues : } mn + m + mn + 0 = 2mn + m \end{array}$$

Toutes les grandeurs sont donc déterminées, et le nombre de ces grandeurs de même que le nombre des équations est le double du nombre des biens multiplié par le nombre des individus, augmenté du nombre des biens.

L'évaluation de la monnaie pour chaque individu peut être déduite des équations :

$$\frac{dU}{dm_1} = \frac{dU}{dA_1} \quad (\text{ch. iv, § 2.})$$

$$\frac{dU}{dm_2} = \text{etc.}$$

§ 11

L'étude de la production est tout à fait analogue à la précédente.

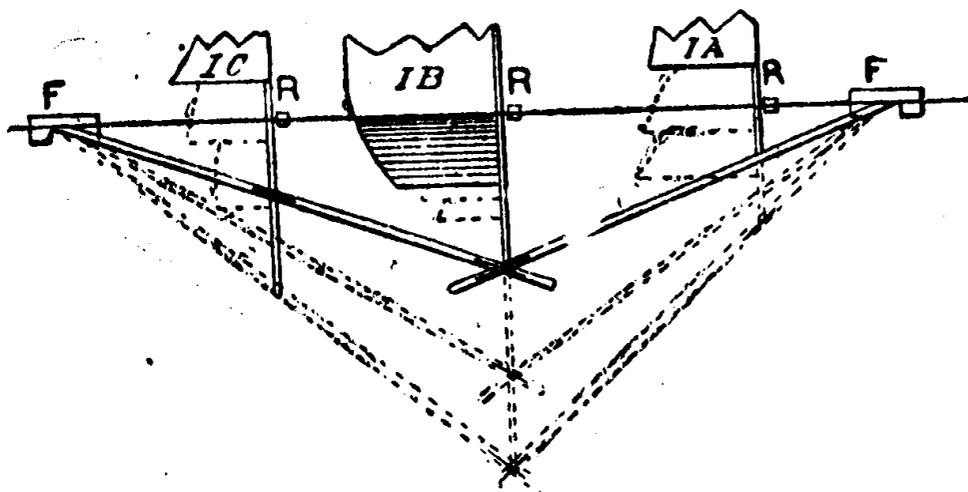


Fig. 12.

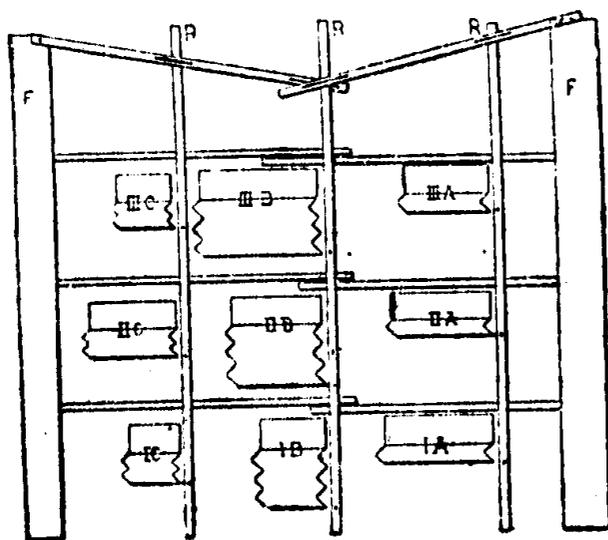


Fig. 13.

## CHAPITRE V

### Combinaison de la production et de la consommation.

#### § I

Jusqu'ici nous avons supposé que les quantités des biens et des recettes (ou des dépenses) étaient *données*. Mais ces quantités sont elles-mêmes déterminées par les causes économiques.

Jevons (1) présente l'enchaînement comme suit :

« Le coût de production détermine l'offre,  
L'offre détermine le degré final d'utilité,  
Le degré final d'utilité détermine la valeur ».

C'est là l'expression de l'ordre chronologique, mais une partie seulement de celle des rapports de causalité. Le coût de production n'est pas le seul facteur de l'offre. La production prévoit l'avenir. Quand les prix sont stables, le prix futur assuré est un incontestable régulateur de l'offre. Auspitz et Lieben me semblent avoir beaucoup de mérite à montrer comment ces faits s'harmonisent. Le prix, la production et la consommation sont déterminés par *l'égalité de l'utilité marginale et du coût marginal de production* (2). Leur exposé lumineux, non seulement fait

(1) *Pol. Econ.*, ch. iv, p. 165.

(2) AUSPITZ et LIEBEN, § 5, p. 17.

ressortir la « symétrie fondamentale de l'offre et de la demande », mais encore réconcilie d'une manière séduisante les anciennes théories unilatérales (*onesided*) de la valeur en apparence contradictoires, en les faisant se disposer comme les facettes opposées d'une même pierre précieuse. Il est décourageant de voir les anciennes discussions se perpétuer encore. Dietzel (1) prétend jouer le pacificateur en usant d'un expédient consistant à répartir le terrain entre les théories contestées.

L'apparence de conflit provient d'une conception inadéquate de la *détermination* mathématique. Quand la quantité d'un bien croît, son utilité marginale pour le consommateur décroît, tandis que sa désutilité marginale pour le producteur croît. Si cette dernière est plus grande que la première, le prix offert par le consommateur sera moindre que celui que le producteur acceptera. Il se produit alors une contraction de la production, et l'utilité et la désutilité se rapprochent l'une de l'autre. Si la quantité disponible est trop petite, le mécanisme économique joue en sens inverse. L'équilibre quoique toujours mal établi tend sans cesse à se réaliser, et ses écarts rapides et délicats sont corrigés par un préposé spécial, le spéculateur.

## § 2

Nous supposons que le taux de la production au cours de la période donnée est exactement égal au taux de la consommation. C'est ce qui a lieu dans un équilibre idéal.

(1) *Die klassische Werttheorie und die Theorie vom Grenznutzen*, dans les *Jahrbücher* de CONRAD, 20.

Les frais de transport et de vente au détail font partie de la « production ».

Le principe de proportionnalité précédemment établi est maintenant généralisé. Les utilités marginales de consommation et les désutilités marginales de production sont, pour chaque individu, dans le même rapport continu — le rapport des prix.

## § 3

Comme cas le plus simple de la combinaison de la

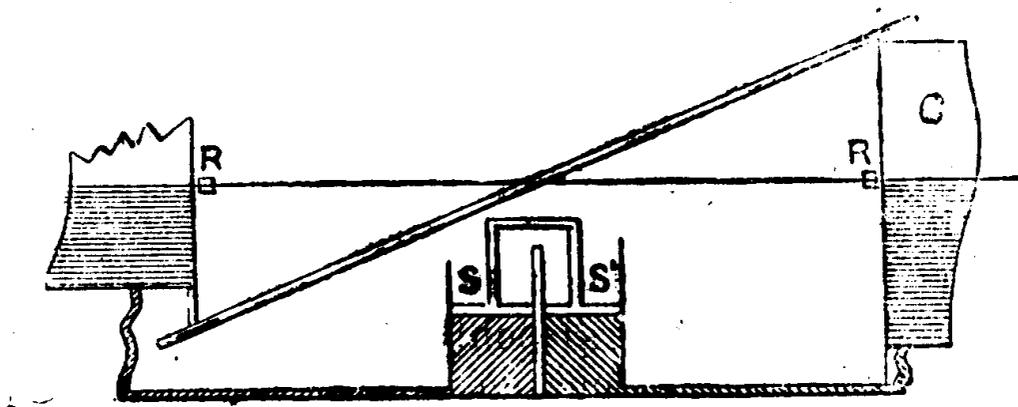


Fig. 14.

production et de la consommation, imaginons un individu consommant d'un bien donné exactement la quantité qu'il en produit.

Sur la figure 14 les tampons (1) ou pistons S et S' qui règlent les quantités contenues dans les citernes relatives respectivement à la production et la consommation sont reliés de manière à se mouvoir simultanément, maintenant ainsi des quantités égales dans les deux citernes. De plus, la pression de l'eau du bassin maintient au même niveau les trois liquides — celui du

(1) Pratiquement on recourrait à un dispositif pneumatique, sans frottement, plus compliqué.

bassin et ceux des deux citernes. Enfin le levier maintient l'utilité marginale égale à la désutilité marginale, son pivot étant fixe et placé à égale distance des axes des ordonnées. L'équilibre bien déterminé qui en résulte est soumis à trois sortes de conditions :

1° La quantité consommée est égale à la quantité produite — condition dont la satisfaction est assurée par les pistons jumelés ;

2° Il y a nécessairement une relation entre la quantité produite et sa désutilité marginale et entre la quantité consommée et son utilité marginale — formes des citernes ;

3° L'utilité marginale et la désutilité marginale sont égales — niveau.

#### § 4. — Interprétation analytique.

Si  $A_\pi$  et  $A_k$  sont les quantités de A respectivement produites et consommées, les conditions de l'équilibre sont :

$$A_\pi = A_k \left. \begin{array}{l} \text{1 équation.} \\ \text{2 inconnues.} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dU}{dA_\pi} = F(A_\pi) \\ \frac{dU}{dA_k} = F(A_k) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{2 équations.} \\ \text{2 nouvelles inconnues.} \end{array}$$

$$\frac{dU}{dA_\pi} = - \frac{dU}{dA_k} \left. \begin{array}{l} \text{1 équation.} \\ \text{aucune nouvelle inconnue.} \end{array} \right\}$$

Nombre des équations :  $1 + 2 + 1 = 4$ .

Nombre des inconnues :  $2 + 2 + 0 = 4$ .

## § 5

Dans le cas le plus général on se trouve en présence de  $n$  individus et de  $m$  biens.

La figure 15 montre simplement le groupement, par une série de nouveaux leviers, de la figure 9 et de la

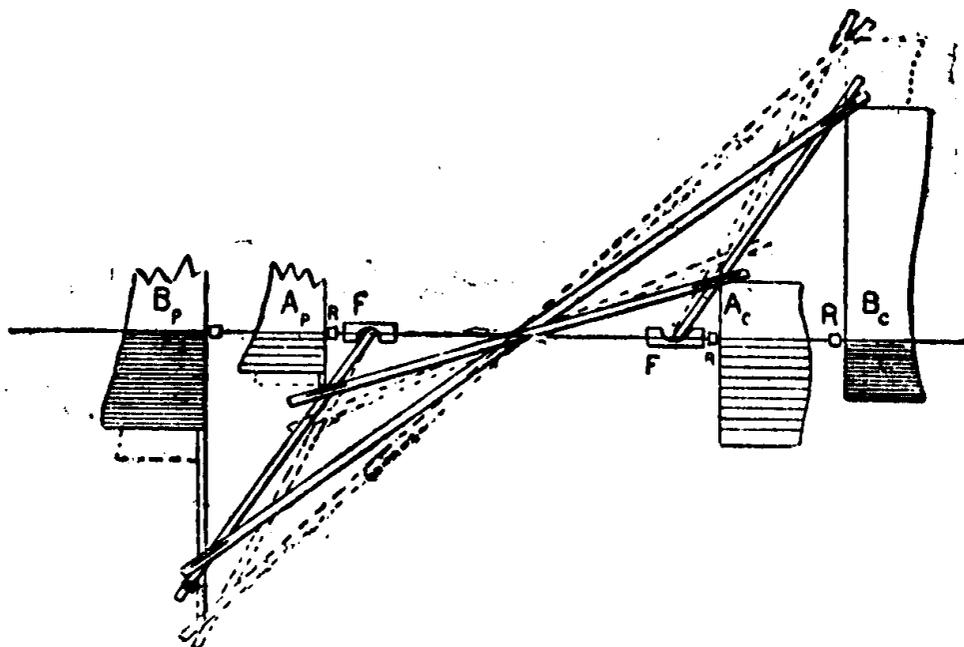


Fig. 15.

figure 12 de telle sorte que pour chaque individu les ordonnées de la citerne de production et de sa citerne de consommation soient égales. Des leviers horizontaux analogues (*fig. 16*) sont destinés à maintenir également l'égalité de prix entre les consommateurs et les producteurs. Les tampons correspondant à chaque bien sont tous jumelés comme sur la figure 14. Des pistons jumelés analogues sont en outre destinés à maintenir l'égalité des recettes et des dépenses de chaque individu.

On voit dès lors que le mécanisme de l'industrie est auto-régulateur. Il n'y a rien d'arbitraire dans la dis-

tribution des revenus ou des biens. Les seuls changements possibles sont corrélatifs à des changements dans les *formes* des citernes ou dans leur *nombre*, c'est-à-dire à des changements de « coût » de production ou d'utilité de consommation, ou à des changements dans la population (changements qui, remarquons-le, vont en-

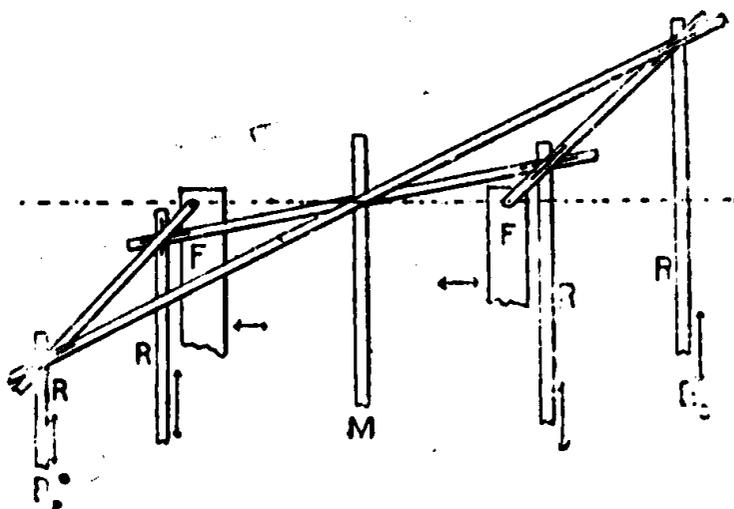


Fig 16.

semble). En rendant les citernes amovibles et remplaçables par d'autres, on peut étudier, comme au chapitre précédent, les effets correspondant à différentes hypothèses.

Toutefois, cet équilibre est indéterminé sous un certain rapport. A la différence du précédent il ne conduit pas à la fixation de l'unité de valeur. La somme des contenus de toutes les citernes de revenus est arbitraire. Si l'on enfonce simultanément tous les pistons jumelés correspondant aux recettes et aux dépenses de manière à augmenter dans la même proportion tous les revenus, l'équilibre n'est pas détruit, et la répartition des biens n'est pas modifiée. Les citernes postérieures s'ouvrent simplement dans un rapport uniforme (1). Seul l'étalon monétaire a changé.

(1) Cf. ch. iv, § 8, numéro 7.





ne semble à première vue. Il nous faut donc une équation supplémentaire. Nous pouvons écrire :

$$p_a = 1$$

De la sorte A devient l'étalon de la valeur (Cf. § 5).

Les équations du chapitre IV ne comportent aucune restriction semblable.

## CHAPITRE VI

### Les opérations composantes de la production.

#### § I

Sans nous attarder aux applications économiques du mécanisme qui vient d'être décrit, nous allons passer rapidement à la description d'un mécanisme plus compliqué.

Pratiquement la production se compose d'un certain nombre d'opérations successives. La dernière de celles-ci est la vente au détail. Groupons toutes les autres opérations sous le titre de production. Le prix relatif à la production et celui relatif à la consommation ne sont plus égaux.

Jusqu'à présent nous avons eu deux groupes de citernes, le groupe correspondant à la production et le groupe correspondant à la consommation. Supposons maintenant ces groupes suffisamment écartés pour introduire un troisième groupe relatif à l'échange ou à la vente au détail comme il est indiqué sur la figure 17.

Le groupe relatif à l'échange est constitué par une série de citernes doubles correspondant chacune à un bien particulier et à une personne particulière.

Considérons la citerne I A, par exemple (l'indice in-

férieur désignant l'échange ou la vente au détail). Le compartiment antérieur renferme la quantité de A que l'achète et vend ou qu'il transfère du producteur au consommateur. Le compartiment postérieur contient la monnaie affectée à cette opération.

Les citernes relatives à l'échange sont rattachées les

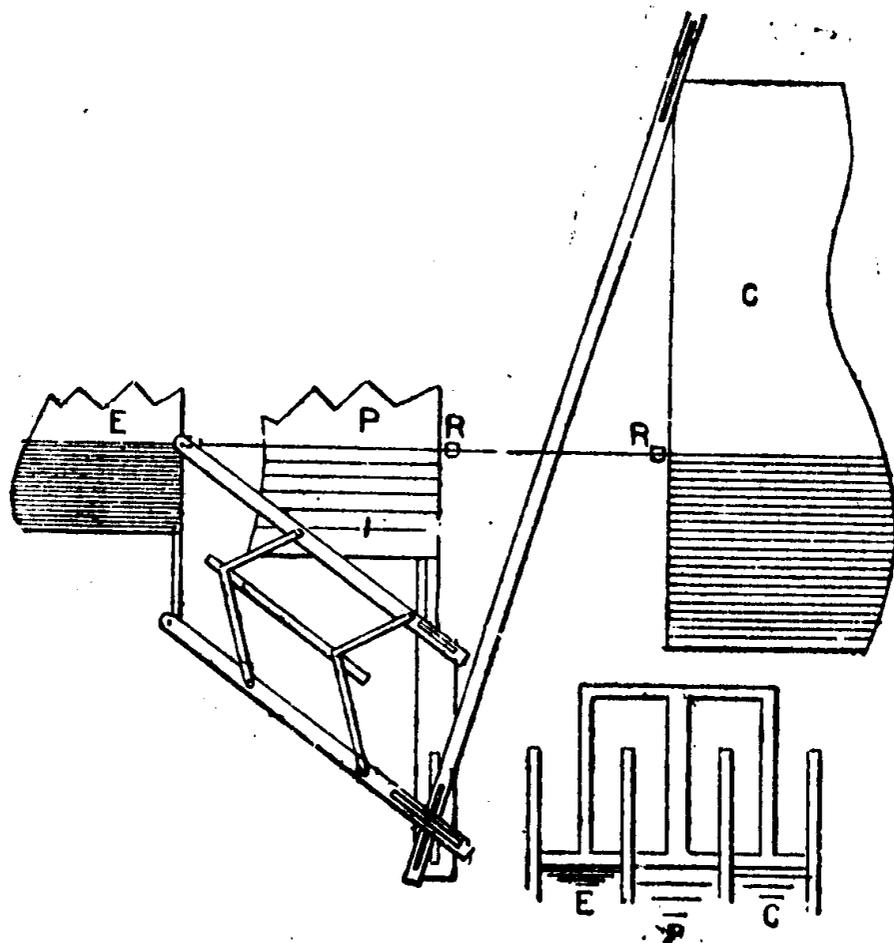


Fig. 17.

unes aux autres et au groupe relatif à la *production* par des leviers disposés *exactement comme s'il s'agissait de l'introduction sur le marché d'un nombre égal de nouveaux biens*.

Ainsi donc les règles maintiennent constante la valeur d'échange en monnaie ; toutefois, au lieu de la simple relation primitive entre les producteurs et les consommateurs, on a maintenant la suivante, à savoir



$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dU}{dA_{\pi,1}} = F(A_{\pi,1}); \dots; \frac{dU}{dM_{\pi,1}} = F(M_{\pi,1}) \\
 \frac{dU}{dA_{\varepsilon,1}} = F(A_{\varepsilon,1}); \dots; \frac{dU}{dM_{\varepsilon,1}} = F(M_{\varepsilon,1}) \\
 \frac{dU}{dA_{k,1}} = F(A_{k,1}); \dots; \frac{dU}{dM_{k,1}} = F(M_{k,1}) \\
 \dots \\
 \frac{dU}{dA_{\pi,n}} = F(A_{\pi,n}); \dots; \frac{dU}{dM_{\pi,n}} = F(M_{\pi,n}) \\
 \frac{dU}{dA_{\varepsilon,n}} = F(A_{\varepsilon,n}); \dots; \frac{dU}{dM_{\varepsilon,n}} = F(M_{\varepsilon,n}) \\
 \frac{dU}{dA_{k,n}} = F(A_{k,n}); \dots; \frac{dU}{dM_{k,n}} = F(M_{k,n})
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l}
 3 mn \text{ \u00e9quations.} \\
 3 mn \text{ nouvelles} \\
 \text{inconnues} \\
 (\text{et. marg.}).
 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dU}{dA_{\pi,1}} : \dots : \frac{dU}{dM_{\pi,1}} : \frac{dU}{dA_{\varepsilon,1}} : \dots : \frac{dU}{dM_{\varepsilon,1}} : \frac{dU}{dA_{k,1}} : \dots : \frac{dU}{dM_{k,1}} = \\
 \frac{dU}{dA_{\pi,2}} : \dots : \frac{dU}{dM_{\pi,2}} : \frac{dU}{dA_{\varepsilon,2}} : \dots : \frac{dU}{dM_{\varepsilon,2}} : \frac{dU}{dA_{k,2}} : \dots : \frac{dU}{dM_{k,2}} = \\
 \dots \\
 \frac{dU}{dA_{\pi,n}} : \dots : \frac{dU}{dM_{\pi,n}} : \frac{dU}{dA_{\varepsilon,n}} : \dots : \frac{dU}{dM_{\varepsilon,n}} : \frac{dU}{dA_{k,n}} : \dots : \frac{dU}{dM_{k,n}} = \\
 p_{a,\pi} : \dots : p_{m,\pi} : p_{a,\varepsilon} : \dots : p_{m,\varepsilon} : -p_{a,k} : \dots : -p_{m,k}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l}
 n (3 m - 1) \\
 \text{\u00e9quations} \\
 \text{ind\u00e9pen-} \\
 \text{dantes.} \\
 \\
 \text{aucune} \\
 \text{nouvelle} \\
 \text{inconnue.}
 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned}
 p_{a,\pi} + p_{a,\varepsilon} = p_{a,k} \\
 \dots \\
 p_{m,\pi} + p_{m,\varepsilon} = p_{m,k}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l}
 m \text{ \u00e9quations.} \\
 \\
 \text{aucune nouvelle inconnue.}
 \end{array}$$

Nombre des \u00e9quations :

$$2 m + (n - 1) + 3 mn + n (3 m - 1) + m = 6 mn + 3 m - 1$$

Nombre des inconnues :

$$3 mn + 3 m + 3 mn + 0 = 6 mn + 3 m.$$

Le second groupe contient en apparence  $n$  \u00e9quations au lieu de  $n-1$  comme il est dit ci-dessus. Mais, par multiplication de la premiere ligne du premier groupe, nous avons :

$$\begin{aligned}
 (A_{\pi,1} + \dots + A_{\pi,n}) p_{a,\pi} &= (A_{\varepsilon,1} + \dots + A_{k,n}) p_{a,\pi} \\
 (A_{\varepsilon,1} + \dots + A_{\varepsilon,n}) p_{a,\varepsilon} &= (A_{k,1} + \dots + A_{k,n}) p_{a,\varepsilon}
 \end{aligned}$$



exemple, il y a quelque 16 opérations se rattachant ainsi les unes aux autres.

Les réactions et l'équilibre dans le monde réel sont encore plus compliqués que ceux envisagés ici. Non seulement il existe un équilibre sur un marché tel que celui de New-York City, mais il y a encore une mutuelle dépendance des divers marchés. Le taux de transport détermine en partie l'importance de la dépendance, et l'intensité des relations détermine en partie le taux de transport. Comme dit Cournot (1), «... le système économique est un ensemble dont toutes les parties se tiennent et réagissent les unes sur les autres ».

#### FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

(1) *Principes mathématiques*, ch. xi, p. 146.

## DEUXIÈME PARTIE

### L'UTILITÉ D'UN BIEN FONCTION DES QUANTITÉS DE TOUS LES BIENS

---

#### CHAPITRE PREMIER

##### Deux biens.

##### § I

Nous avons considéré l'utilité de chaque bien comme n'étant une fonction que de la quantité de ce bien. Il est évident qu'elle dépend de cette quantité plus que de toute autre, et l'étude constituant la Partie I est une première approximation nécessaire. En astronomie on étudie tout d'abord la seule attraction du soleil sur la terre pour déterminer le mouvement de la terre ; puis on fait intervenir l'influence de la lune, enfin les « perturbations » occasionnelles dues aux planètes et aux comètes. On ne parvient jamais à une précision absolue, car le mouvement de la terre est une fonction de la masse et de la position de tous les corps de l'univers.

De même l'utilité de la 100<sup>m</sup>e livre de beurre (100 livres par an) dépend principalement de ces cent livres. Elle ne serait pas modifiée sensiblement par un changement dans la quantité des vêtements, mais elle serait sensiblement réduite si la quantité de *pain* consommée

était réduite de 300 miches à 200, car le pain et le beurre vont ensemble.

Il convient de distinguer ici avec soin les deux manières dont la quantité d'un bien peut agir sur l'utilité d'un autre. Même dans l'hypothèse envisagée dans la Partie I, un changement dans le prix des vêtements provoquait un changement dans l'évaluation individuelle de la monnaie, et agissait ainsi sur la consommation du pain et aussi par suite sur l'utilité marginale et le prix du pain. Mais dans notre nouvelle hypothèse, un changement dans le prix du beurre produit directement un changement dans l'utilité de la *même* quantité de pain. Dans le premier cas l'utilité marginale du pain ne peut changer qu'après un changement dans sa *quantité*. Dans le second l'utilité marginale de la *même* quantité de pain se trouve changée ; le premier correspond à une modification de la quantité d'eau d'une citerne, le second se rapporte à une modification de la paroi même de la citerne.

Dans la Partie I nous supposions :  $\frac{dU}{dA_1} = F(A_1)$  ; mais maintenant nous devons écrire  $\frac{dU}{dA_1} = F(A_1, B_1, C_1, \dots M_1)$ .

## § 2

Nous allons voir que cette sorte de dépendance des biens est très courante. On achète chaque article en se préoccupant d'autres articles, l'huile en se préoccupant du nombre des lampes, le linge de lit du nombre des lits, le drap de la quantité de vêtements à approvisionner, les tapis du nombre d'étages loués ou bâtis, les bibliothèques du nombre de livres possédés ; la demande de rails d'acier est solidaire de celle des traverses pour

voies ferrées, celle des locomotives de celle des voitures, etc.

Il en va de même dans la production des « cas particuliers de la valeur » dont parle Mill (1) et que Jevons (2) envisage de même ; le coke et le gaz de houille, le mouton et la laine, le bœuf, la peau et la graisse, etc.

Les cas qui viennent d'être cités comme exemples sont des cas d'articles « complémentaires » (3). Sous la désignation d'articles « concurrents », on trouve l'huile minérale et les autres huiles, les diverses « qualités » de chaque article comme les viandes, les sortes de farines, etc., cependant qu'en fait de production presque chaque groupe de deux articles est un groupe d'articles concurrents. Un homme occupé dans une affaire n'aspire pas à se mêler à une autre, la désutilité de la production de 1000 tonnes de charbon par an est accrue si celui qui les produit se préoccupe de faire marcher une fabrique de papier ou de faire du commerce de bijouterie.

### § 3

En introduisant cette nouvelle dépendance des biens, on voit que si en un point d'équilibre les citernes contiennent la quantité d'eau convenable et ont pour ordonnées les utilités marginales appropriées, aussitôt qu'on enfonce un tampon de revenu ou de bien, non seulement la distribution de l'eau change, mais les formes des citernes sont modifiées. Si la quantité de pain augmente, il se peut que les citernes à biscuit

(1) Liv. III, ch. xvi.

(2) Page 197.

(3) AUSPITZ et LIEBEN, p. 170.

se rétrécissent et celles à beurre s'élargissent. En d'autres termes, l'ordonnée (utilité marginale) correspondant à la *même quantité* de biscuit devient plus petite, et pour le beurre plus grande. Le résultat général est de maintenir à peu près constant le rapport des utilités marginales du pain et du biscuit ainsi que, par suite, leurs prix, cependant que l'abaissement du prix du pain est de nature à accroître l'utilité marginale et le prix du beurre indépendamment de sa quantité.

#### § 4

La propriété essentielle des succédanés ou articles concurrents, c'est que les utilités marginales ou les prix des quantités qui en sont effectivement produites et consommées tendent à se maintenir dans un rapport constant. Nous pouvons définir *succédanés parfaits* ceux pour lesquels ce rapport est absolument constant. Le caractère essentiel des articles complémentaires, c'est que le rapport des quantités qui en sont effectivement produites et consommées tend à être constant (autant de cordons de souliers que de souliers, par exemple, quel que soit leur coût). Nous pouvons définir *articles complémentaires parfaits* ceux pour lesquels ce rapport est absolument constant.

En supposant « parfait » chaque groupe d'articles concurrents et d'articles complémentaires, il est possible de disposer les citernes de telle sorte que les modifications de la forme de certaines citernes, de même que les modifications du contenu d'autres citernes, soient faibles ou nulles. Ainsi, si quatre sortes de farinesont « parfaitement » concurrentes de telle manière que leurs utilités marginales soient toujours dans le même rapport 8, 9, 11, 17, nous pouvons établir pour

l'individu I une citerne multiple dont le contenu sera désigné sous le titre « farine » sans spécification. Chaque unité de volume de liquide représentera des quantités équivalentes de chaque sorte, i. e.  $\frac{1}{8}$  de baril de la première qualité,  $\frac{1}{9}$  de la seconde,  $\frac{1}{11}$  de la troisième ou  $\frac{1}{17}$  de la quatrième, tandis que l'ordonnée représentera l'*utilité commune* de l'une quelconque de ces quantités équivalentes.

Si quatre articles complémentaires, comme les parties d'un vêtement, les manches, les poches, les boutons et le corps du vêtement, sont toujours produits et consommés en nombres respectivement proportionnels à 2, 4, 3 et 1, nous pouvons établir pour l'individu I une citerne multiple dont le contenu sera désigné sous le titre « vêtements », sans distinction des parties.

Avec de telles combinaisons, l'étude à l'aide des citernes de la Partie I restera fort acceptable et presque parfaite si on se maintient dans le voisinage de la position d'équilibre.

Mais peu d'articles constituent véritablement un groupe d'articles parfaitement complémentaires ou parfaitement concurrents, et il peut arriver qu'un membre d'un groupe se rattache à un autre. Ainsi le beurre est complémentaire pour le pain et le biscuit, et quoique l'abaissement du prix du pain augmente directement l'utilité du beurre, il l'augmente indirectement en diminuant l'usage du biscuit.

On voit immédiatement que les relations entre les formes des citernes — si nous nous préoccupons maintenant de chaque qualité de viande, etc. et de chaque partie d'un ustensile considéré comme un bien séparé — sont trop compliquées pour pouvoir être repré-

sentées, ne fut-ce que dans l'imagination, sans l'aide d'un nouveau procédé d'étude.

### § 5

L'étude précédente est incomplète, non incorrecte. Toute l'interdépendance décrite dans la Partie I existe, mais il existe aussi d'autres rapports entre les formes des citernes qui ne peuvent être exposés mécaniquement. En une position d'équilibre le mécanisme des citernes est susceptible de représenter correctement les quantités, les utilités et les prix, mais la forme de chaque citerne est une fonction de l'ensemble des conditions de l'équilibre, et elle se modifie aussitôt que celles-ci se modifient. Néanmoins en général l'interdépendance des formes des citernes est très faible. En d'autres termes, pratiquement, l'utilité d'un bien varie tellement plus du fait de la variation de la quantité de ce bien que du fait des variations des autres biens, que les relations établies dans la Partie I peuvent être regardées comme de bonnes premières approximations. Cela est particulièrement vrai si l'on groupe les biens comme il est dit au § 4, de manière à éliminer toutes les influences réellement notables que les biens exercent les uns sur les autres (1). On verra ultérieurement que l'étude de la Partie II est également incomplète, et il en sera toujours ainsi. Ni l'économie politique ni aucune autre science ne peut prétendre étudier à fond son sujet.

(1) MARSHALL, *Prin. Econ.*, Note math. XII, p. 756, dit : « Prof. Edgeworth's plan of representing  $U$  and  $V$  as general functions of  $x$  and  $y$  [voir la préface à ce mémoire] has great attractions to the mathematician ; but it seems less adapted to express the every day facts of economic life than of regarding, as Jevons did, the marginal utilities of apples as fonction of  $x$  [la quantité de pommes] simply. » (Le

## § 6

En se reportant aux définitions de l'utilité en tant que quantité (Partie I, ch. I), il y a lieu de noter que la troisième définition, qui déterminait le rapport de deux utilités, reposait sur l'hypothèse que l'utilité de chaque bien était indépendante de la quantité de tout autre bien. Cette hypothèse était nécessaire pour prouver que deux applications de la déf. (3) conduisaient à des résultats concordants (Partie I, ch. I, § 4). Abandonner cette hypothèse, comme nous l'avons fait maintenant, c'est renoncer à l'usage de cette troisième définition. A la fin de la Partie II nous ferons un examen plus approfondi de « l'utilité en tant que quantité ». Quant à présent nous nous contenterons de prendre l'utilité marginale d'un article quelconque comme unité d'utilité. Naturellement si nous venions à nous servir de quelque autre utilité marginale comme unité, les mesures ne seraient plus d'accord. Ce n'est, toutefois, pas là un désastre. On verra bientôt que pour le sujet qui nous occupe, la fixation du sens de la phrase, « une utilité est double d'une autre », n'a pas une réelle importance.

## § 7

Bornons-nous à fixer tout d'abord notre attention sur deux biens (*a*) et (*b*) consommés par un seul individu. Supposons que cet individu règle tout d'abord sa com-

ystème du Prof. Edgeworth dans lequel *U* et *V* sont représentés comme des fonctions générales de *x* et de *y* offre de grands attraits pour les mathématiciens ; mais il paraît moins propre à exprimer les faits de tous les jours de la vie économique que le système qui regarde, comme le fit Jevons, les utilités marginales des pommes simplement comme des fonctions de *x* (Trad. franç., t. II, p. 589.)

binaison de consommation *totale* au mieux de ses goûts personnels. Puis pour étudier *partiellement* cet équilibre de son choix, procédons, pour ainsi dire, à des expériences sur lui, de la manière suivante. Faisons-lui modifier sa combinaison de consommation en réglant les quantités A et B des deux biens mis à part (a) et (b) de toutes les manières possibles, mais sans changer les quantités C, D, etc. des autres biens. L'utilité marginale de chaque bien variera en fonction non seulement de sa propre quantité, mais aussi de la quantité de l'autre.

Ainsi

$$\frac{dU}{dA_1} = F(A_1, B_1)$$

$$\frac{dU}{dB_1} = F(B_1, A_1)$$

Ces relations peuvent être regardées comme les dérivées par rapport à A et B de

$$U_1 = \varphi(A_1, B_1)$$

où  $U_1$  est l'utilité totale pour I de la combinaison de consommation  $A_1$  et  $B_1$ .

Supposons que sur la figure 18 l'abscisse OX représente les quantités  $B_1$  de (b) et l'ordonnée OY les quantités  $A_1$  de (a). Un point P représente par ses coordonnées *une combinaison possible* de quantités  $A_1$  et  $B_1$  consommées par I. En faisant varier le point P on obtient toutes les combinaisons possibles de  $A_1$  et de  $B_1$ . En P élevons une perpendiculaire au plan du papier dont la hauteur représente l'utilité marginale de  $A_1$  correspondant à la combinaison représentée par ce point, c'est-à-dire le degré d'utilité d'un petit accroissement de  $A_1$  ( $B_1$  restant le même). Si P prend successivement

toutes les positions possibles, le lieu de l'extrémité de cette perpendiculaire sera une surface.

De même en P élevons une autre perpendiculaire correspondant à l'utilité marginale de  $B_1$ ; son extrémité engendrera une autre surface. La première surface joue le rôle d'une *courbe* d'utilité pour (a), la seconde pour (b). Ces deux surfaces peuvent

être considérées comme les surfaces dérivées (par rapport aux variations de  $A_1$  et de  $B_1$ ) d'une surface primitive dont la cote (perpendiculaire en P) est l'*utilité totale* de la combinaison de  $A_1$  et de  $B_1$  représentée par P. Cette surface est ordinairement con-

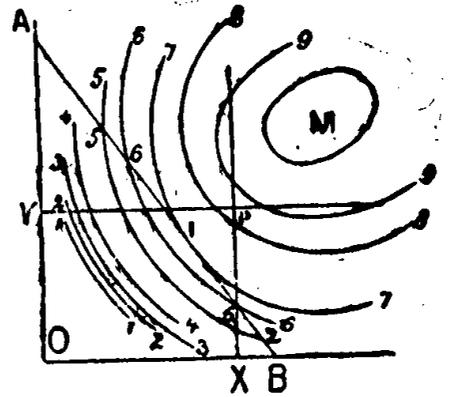


Fig. 18.

vexe comme un dôme, avec un seul maximum, mais il n'en est pas nécessairement toujours ainsi. Elle peut avoir deux maxima comme on le verra bientôt. Dans ce cas elle ne saurait être partout convexe.

Si l'on trace un plan tangent à cette dernière surface en un point situé au-dessus de P, la pente de ce plan parallèlement à la direction A sera l'ordonnée de la première surface dérivée, i. e. sera l'utilité marginale de  $A_1$ , cependant que la pente de droite à gauche sera l'utilité marginale de  $B_1$  ou l'ordonnée de la seconde surface dérivée. La surface primitive offre ainsi un mode pratique de groupement dans l'esprit des deux utilités marginales. Sa hauteur (1) absolue au-dessus du plan du papier n'a pas d'importance; on peut la diminuer ou l'augmenter sans troubler les directions tangentielles ou affecter les deux dérivées.

(1) C'est en réalité la constante arbitraire d'intégration.

## § 8

Les deux surfaces ainsi construites ne s'étendent pas nécessairement indéfiniment au-dessus du plan. Elles peuvent devenir asymptotes à un plan ou à un cylindre vertical de telle sorte que pour certains points du plan il peut n'y avoir de surface ni au-dessus ni au-dessous.

Au point de vue mathématique l'utilité totale et les utilités marginales en ces points sont *imaginaires*. Au point de vue économique l'individu est dans l'impossibilité de consommer les quantités de (a) et de (b) représentées par de tels points (1). On peut dire des portions du plan où sont situés ces points qu'elles sont « vides ».

## § 9

Si (*fig. 18*) le point P se déplace verticalement (de haut en bas de la page), l'extrémité de la perpendiculaire représentant l'utilité totale décrit une courbe d'Auspitz et Lieben relative à A<sub>1</sub> étant entendu toutefois que les quantités des autres biens ne varient pas (2).

La perpendiculaire représentant l'utilité marginale de A<sub>1</sub> engendre sur la première surface dérivée une courbe d'utilité de Jevons (3) relative à A<sub>1</sub> étant entendu

(1) Cette introduction d'« asymptote » et d'« imaginaire » semble éluder cette classe de difficultés qui fit dire à Marshall que ses courbes cessaient d'avoir une signification aux points où l'individu ne pourrait pas vivre.

(2) C'est, par conséquent, en un mot, une « Elementakurve » (courbe élémentaire) d'une « Lebensgenusskurve » (courbe de jouissance de la vie), une « Anfangsordinate » (ordonnée initiale) étant donnée.

(3) Il est évident que la courbe de Jevons est la dérivée de celle d'Auspitz et Lieben. Voir tableau Appendice I, Division II, § 2.

que  $B$ ,  $C$ , etc. sont constants. Cette courbe va ordinairement en s'abaissant, mais il peut n'en être pas ainsi et il ne saurait en être ainsi dans certaines régions, si la surface est la dérivée d'une primitive à deux maxima ou d'une primitive concave quelconque. L'autre perpendiculaire, par contre, trace une courbe à laquelle on n'a jamais eu recours, à savoir : une courbe montrant les rapports entre les quantités  $A$ , et l'utilité marginale de  $B$ , quand  $B$  reste constant. Cette courbe va ordinairement en s'abaissant ou en s'élevant selon que les articles ( $a$ ) et ( $b$ ) sont concurrents ou complémentaires. Par exemple, supposons que ( $a$ ) et ( $b$ ) sont deux marques de farine. Si  $I$  consomme pendant la période considérée  $X$  unités d'une marque et 20 unités d'une autre, son désir d'une 21<sup>e</sup> unité dépendra de la quantité qu'il a de la première (de la grandeur de  $X$ ). S'il a beaucoup de la première sorte, son désir est faible.

On peut obtenir une paire de courbes semblable en déplaçant  $P$  horizontalement.

Si l'hypothèse de la Partie I était vérifiée, les deux courbes extraordinaires (à savoir celles qui rattachent respectivement les utilités marginales de  $A$  et de  $B$  aux quantités de ( $b$ ) et de ( $a$ )) se réduiraient à des lignes droites parallèles au plan du papier.

### § 10

Les rapports indiqués par ces trois surfaces sont en fait tous résumés par l'une d'elles — la primitive. En conséquence, pour éviter les transitions fastidieuses d'un mode de représentation à un autre, nous n'envisagerons par la suite que cette surface primitive.

Considérons des sections horizontales de cette surface, c'est-à-dire des sections par des plans parallèles au plan des axes  $A$  et  $B$ . Chaque section forme une

courbe à laquelle on peut donner le nom de *courbe d'indifférence*. C'est le lieu des points représentant toutes les combinaisons de consommation de A et de B qui ont une utilité totale donnée. Sur la figure 18 le nombre attribué à chaque courbe représente le montant de cette utilité. Elles constituent ordinairement une famille de courbes concentriques finissant par s'évanouir au point de satisfaction maximum M. M est le point auquel l'individu fixerait sa combinaison de consommation

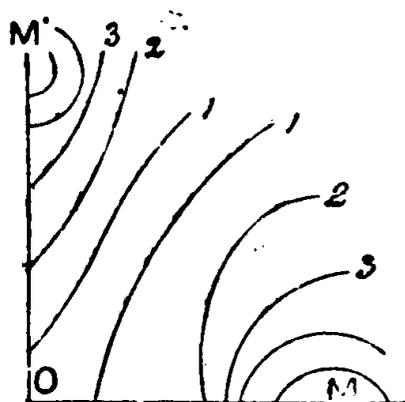


Fig. 19.

tion de A et de B si ces biens ne coûtaient rien. Il peut y avoir deux maxima ou plus. Pour les articles concurrents, ces maxima se trouvent sur les axes (*fig. 19*) car on ne peut pas préférer consommer des deux.

Les cotes peuvent naturellement avoir un certain nombre d'unités de longueur.

Supposons que l'on réduise indéfiniment cette unité depuis un pouce jusqu'à un millimètre et au delà. Notre surface devient alors une couche. Son épaisseur peut être traduite par une *densité* (au lieu de l'être par une cote) correspondant à une répartition sur le plan du papier analogue à celle de l'électricité sur un conducteur. Chaque courbe d'indifférence est le lieu des points où la densité (précédemment la cote) a une valeur donnée. Cette idée de densité sera utilisée par la suite, bien que la nécessité de son usage n'apparaisse pas avant le prochain chapitre.

La figure 20 représente les courbes d'indifférence pour des articles concurrents et la figure 22 pour des articles complémentaires. Pour des succédanés « parfaits » les courbes (*fig. 21*) se réduisent à des lignes droites pa-

rallèles qui interceptent sur les axes A et B des segments inversement proportionnels au rapport invariable de leurs utilités marginales.

Le point M est indéterminé sur la ligne 99. L'antra-

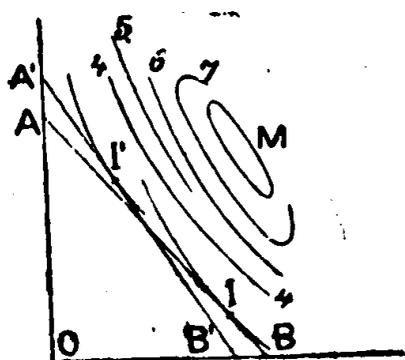


Fig. 20

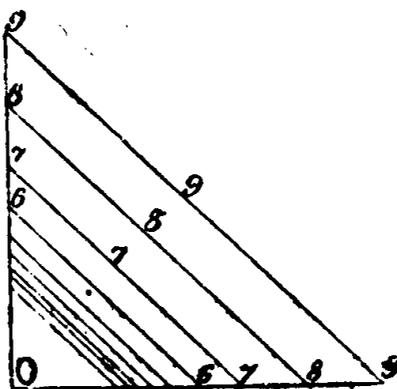


Fig. 21.

cite « Lehigh » et le « Lackawanna » sont sensiblement des succédanés parfaits. S'ils ne coûtaient rien, l'indi-

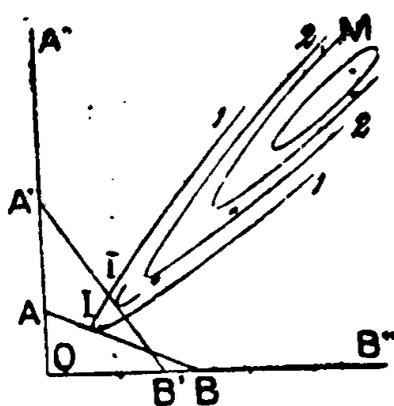


Fig 22.

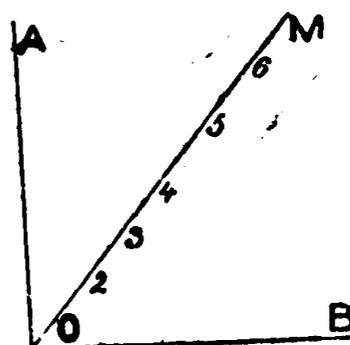


Fig. 23.

vidu consommerait indifféremment la quantité 09 (verticale) de l'un ou la quantité 09 (horizontale) de l'autre ou une combinaison des deux correspondant à un point de la ligne 99 inclinée dans ce cas à 45°.

Pour les articles parfaitement complémentaires, toute la famille de courbes se réduit à une ligne droite passant par l'origine (fig. 23). Considérons, par exemple,

une paire de souliers regardés comme deux biens distincts. En un point de la ligne  $OM$  (*fig. 23*) le désir de souliers droits disparaît tant qu'aucun nouveau soulier gauche n'entre en ligne de compte, et cependant le désir d'une nouvelle paire peut exister. La notion d'utilité marginale ne correspond à rien en ce qui concerne des souliers droits, bien qu'elle ait son application quand il s'agit de paires de souliers.

### § 11

Il y a une infinité de points de vue desquels on peut envisager la surface primitive et ses dérivées et en déduire les relations économiques que nous cherchons (1). Nous ferons porter nos développements principalement sur les courbes d'indifférence dont les tangentes et les normales jouent un rôle important.

Notre individu ayant fixé sa combinaison de consommation totale à sa convenance, supposons qu'il dépense \$ 25 par an pour les deux articles (*a*) et (*b*) considérés. Nous pouvons par la pensée l'obliger, tout en ne modifiant pas le moins du monde ses achats d'autres articles et en disposant ainsi des mêmes \$ 25 à dépenser en (*a*) et (*b*), à former divers projets de dépense. Si le prix de (*a*) est \$ 0,25 et celui de (*b*) \$ 0,50, les deux modes de dépense les plus simples sont de dépenser toute cette somme en (*a*) et d'en acheter 100 unités, ou de la dépenser en (*b*) et d'en acheter 50 unités.

Portons sur la figure 18  $OA = 100$  unités et  $OB = 50$

(1) Nous pourrions, par exemple, partir des courbes correspondant aux sections des surfaces dérivées à différents niveaux, ou bien des courbes orthogonales aux courbes d'indifférence (celles auxquelles nous ferons de nouveau appel) ou bien des courbes représentant le lieu des points où les utilités des deux biens sont dans un rapport donné.

unités. Alors un point quelconque de la droite  $AB$  représentera une combinaison de consommation de  $A$  et de  $B$  achetable pour \$ 25 (1). On peut appeler  $AB$  une ligne de revenu partiel. Ainsi notre individu n'est laissé libre de choisir sa combinaison qu'en un point de cette ligne. Les combinaisons 5 ou 5 présentent le même attrait, mais elles n'en présentent pas un aussi grand que 6 ou 6, qui sont sur un arc de plus grande utilité, ni autant qu'il y en a en  $I$ . Il choisira sa combinaison de manière à réaliser l'utilité totale maximum qui correspond évidemment au point  $I$  où  $AB$  est tangente à une courbe d'indifférence (2). C'est en ce point qu'« il obtient le plus pour son argent ».

Son choix de  $I$  est naturellement identique à ce qu'il était avant que nous commencions notre étude. Mais nous avons avancé d'un pas. Nous avons partiellement analysé cet équilibre, c'est-à-dire que nous saisissons l'équilibre de  $A$  et de  $B$  lorsque les prix et les quantités des autres articles restent identiques à eux-mêmes. C'est comme le savant qui trouve au repos un pendule libre de se mouvoir dans un plan vertical et cherche à en analyser l'équilibre. Il en limite immédiatement le mouvement à un seul plan et en examine l'équilibre. On peut étendre cette comparaison. Le principe sur lequel repose l'équilibre d'un pendule ou un équilibre mécanique (comme celui d'un réservoir de moulin ou d'un pont suspendu), c'est : la réalisation des dispositions qui minimisent le potentiel. De même le suprême principe en

(1) Preuve : L'équation de  $AB$  est  $\frac{y}{OA} + \frac{x}{OB} = 1$ ,  $x$  et  $y$  étant les coordonnées d'un point de  $AB$ . Ceci donne  $y \cdot \frac{25}{OA} + x \cdot \frac{25}{OB} = 25$ ; c'est-à-dire que  $x$  multiplié par son prix +  $y$  multiplié par son prix égale \$ 25.

(2) Lorsque  $AB$  est tangente à deux courbes d'indifférence on choisit celle qui correspond à la plus grande utilité.

fait d'équilibre économique, c'est : la réalisation de l'arrangement qui rend maximum l'utilité (1).

### § 19

OA et OB représentant les quantités A et B des biens (*a*) et (*b*) achetables pour la même somme (\$ 25), ils sont inversement proportionnels aux prix de (*a*) et de (*b*).

Si les prix restent les mêmes, mais que l'individu devienne plus riche et que la somme qu'il peut se permettre de dépenser en (*a*) et (*b*) soit non plus \$ 25 mais \$ 50, la droite AB recule simplement deux fois plus loin en restant parallèle à elle-même. Pendant qu'elle se déplace, son point de tangence décrit en variant une ligne sinueuse, le lieu de tous les points auxquels l'individu fixerait sa combinaison de A et de B aux prix donnés.

Si le prix de (*a*) décroît, OA diminue proportionnellement et on trouve un nouveau point de contact. Si les articles sont complémentaires (*fig. 22*), un changement de prix n'entraîne pas de la part de la tangente une modification bien considérable de la proportion dans laquelle sont consommés les deux articles, car cette tangente passe simplement de la position I à la position I' (par exemple), et il est évident que les coordonnées de I' sont sensiblement dans le même rapport que celles de I ; si ce sont des succédanés (*fig. 20*) un changement de prix relativement faible entraîne une énorme modification des proportions utilisées (I et I'). C'est ce

(1) Voir d'intéressantes remarques d'EDGEWORTH dans les *Mathematical Psychics*. Et aussi dans son discours comme Prés. de la section de Scien. Econ. et de Statistique de l'Ass. Brit., *Nature*, 19 septembre 1889, p. 496.

qui a eu lieu en 1889 lorsqu'un syndicat du cuivre tenta d'élever le prix du cuivre. Il n'y a guère d'article qui n'ait quelque succédané. Cette sorte de dépendance appelle la vigilance des industriels. C'est à cause de cette dépendance que certains articles « utiles » cessent d'être utilisés.

### § 13

La figure 24 correspond à deux « sortes » d'un même bien, comme le sucre roux et le granulé. La sorte supérieure est portée sur l'axe

(horizontal) B et l'inférieure sur l'axe (vertical) A. Le point de satisfaction maximum est sur ou dans le voisinage de l'axe B. Si l'individu est pauvre et ne peut se permettre qu'une faible dépense en l'article, il achètera la qualité la plus ordinaire. La droite AB est tan-

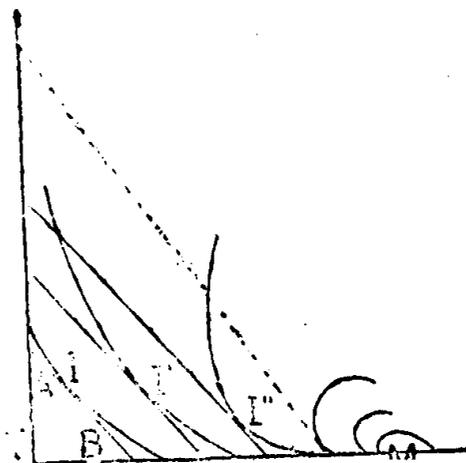


Fig. 24.

gente à une ligne d'indifférence sur ou dans le voisinage de l'axe A en I. S'il devient riche, la droite AB s'éloigne de l'origine et il acquiert la combinaison I' comprenant considérablement plus de B ; il emploie cette qualité supérieure le dimanche (par exemple) tout en consommant A les jours de semaine. S'il devient encore plus riche, il passe à la position I'' en n'employant plus de A ou seulement un peu.

L'inclinaison de la droite AB est telle que  $OA > OB$ , c'est-à-dire que A est meilleur marché que B, car OA et OB sont les quantités de A et de B achetables avec la même quantité de monnaie. Si les prix de A et de B

étaient égaux de telle sorte que  $OA = OB$ ,  $AB$  ne serait pas tangente à une courbe d'indifférence en denors de l'axe  $B$ , et  $A$  cesserait d'être utilisé.

Il est évident en outre qu'une légère variation du rapport des prix de  $A$  et de  $B$  changera considérablement la position de  $I$  pour un homme pauvre, mais qu'elle ne changera pas notablement celle de  $I'$  pour un homme riche.

Si l'importance du consommateur pauvre est prédominante, la droite  $AB$  suivra la direction générale des courbes dans le voisinage de l'origine. Si l'importance du consommateur riche est prédominante, la droite  $AB$  aura une pente plus rapide (comme dans la position pointillée). En d'autres termes, les prix des deux qualités se différencient largement.

Cela explique que sur un marché riche, comme New-York City, une légère différence de qualité provoque une énorme divergence de prix, tandis que dans certains bourgs de campagne il n'existe pas de différences de sorte ou bien que toutes les sortes sont vendues au même prix. Dans les régions rurales de « l'ouest », tous les morceaux de bœuf se vendent le même prix (environ 10 cents la livre). Dans les villes de l'ouest on distingue ordinairement deux ou trois qualités, tandis qu'à New-York un épicier établira plus d'une douzaine de prix pour un même bœuf, variant de 10 à 25 cents par livre.

#### § 14

Sur la figure 25 si l'individu cherche à changer la position de  $III$ , il peut le faire dans beaucoup de « directions » différentes. S'il la change dans la direction de  $III \alpha$ , il accroîtra sa consommation de  $A$  sans modifier

celle de B, ou s'il la change dans la direction III  $\beta$ , celle de B sans modifier celle de A ; s'il la change dans une direction intermédiaire III  $\delta$ , il accroîtra tout à la fois A et B et ce dans le rapport des composantes de cette direction (III  $\alpha$  et

III  $\beta$ ). La direction d'accroissement maximum de l'utilité est perpendiculaire à la courbe d'indifférence (1). Nous pouvons représenter III  $\delta$  comme une *force*. Si III était dans toute autre position, la force aurait évidemment

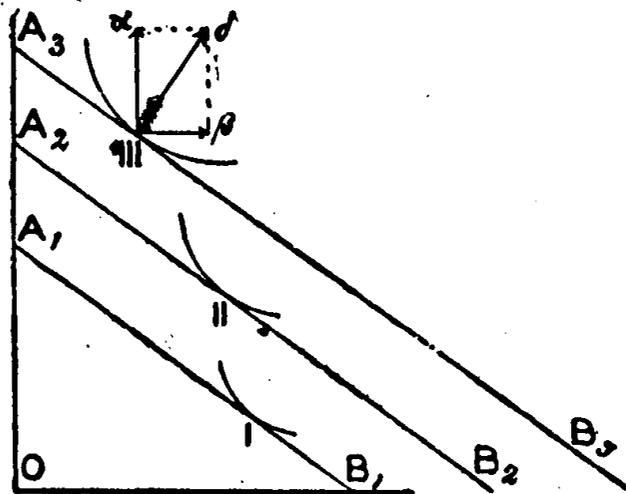


Fig. 25.

une composante suivant la droite A<sub>3</sub> B<sub>3</sub> et ramènerait III dans la position d'équilibre III.

Nous pouvons appeler la direction normale III  $\delta$  la « direction maximum ». Elle jouit de l'importante propriété que ses composantes III  $\alpha$  et III  $\beta$  sont proportionnelles aux utilités marginales de A et de B, cela résulte d'un théorème du calcul des vecteurs (2) ou de ce que : III  $\alpha$  et III  $\beta$  sont inversement proportionnels à OA<sub>3</sub> et à OB<sub>3</sub>, c'est-à-dire directement proportionnels aux prix de A et de B, et par conséquent proportionnels à leurs utilités marginales (3).

(1) Car entre deux courbes d'indifférence infiniment voisines le plus court chemin suit la perpendiculaire.

(2) GIBBS, *Vector Analysis*, §§ 50-53.

(3) En effet, en vertu de la similitude des triangles :

$$\frac{III\alpha}{III\beta} = \frac{\delta\beta}{\delta\alpha} = \frac{OB_3}{OA_3} = \frac{p_a}{p_b}.$$

## § 15

Si (*fig. 25*) on trace les divers systèmes de courbes relatifs à tous les individus I, II, etc., et que l'on trace dans chaque cas les droites AB, ces droites sont parallèles. Les prix sont en effet identiques pour tous les individus et OA et OB sont dans chaque cas inversement proportionnels aux prix.

Etant donné que les normales à ces droites seront aussi parallèles, on peut énoncer le théorème : *Les « directions maxima » relatives à tous les individus sont semblables.*

## § 16

Ces procédés s'appliquent à la comparaison de deux biens quelconques et fournissent un moyen de représenter graphiquement des relations statistiques reliant les demandes de deux biens, pour autant que les variations des quantités des autres articles peuvent être éliminées.

Les mêmes principes s'appliquent à la production de deux articles. Le cuir et la graisse sont deux articles complémentaires au point de vue du producteur ; de même le coke et le gaz de houille, le mouton et la laine, et en général tout article et son « produit secondaire ».

D'autre part, beaucoup d'articles sont des articles concurrents ou des succédanés au point de vue du producteur. La difficulté de production du drap est considérablement accrue si le même individu produit des livres. C'est l'essence du principe de la division du travail, et cela conduit à cette importante différence entre la production et la consommation à laquelle nous avons déjà fait allusion une fois. Cette différence et

d'autres seront rappelées à l'Appendice II, § 8. Marshall et d'autres affectionnent l'usage de l'expression « la symétrie fondamentale de l'offre et de la demande ». Il faut ajouter à cette notion celle d'une « asymétrie fondamentale ». Avec les progrès de l'organisation sociale chaque homme (et chaque communauté ou nation) tend à devenir producteur d'un *plus petit nombre* de choses, mais consommateur d'un *plus grand*.

La figure 26 montre le type courant des lignes d'indifférence pour la production. B

est porté ici vers la gauche et A vers le bas ; la droite AB est le lieu des combinaisons de production de A et de B qui peuvent être achetées pour une même quantité de monnaie, soit \$ 1.000. Le point de tangence (1) I est le point auquel l'individu peut produire les \$ 1.000 demandés de A et de B

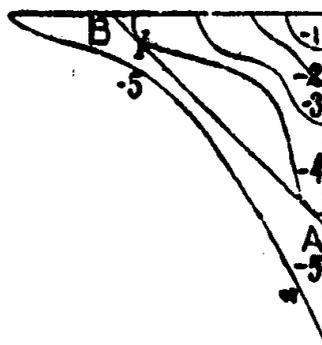


Fig. 26.

avec le minimum de désutilité. Les courbes sont telles que les points de tangence seront en général sur ou dans le voisinage des axes, en particulier si le montant de la production est considérable, i. e. si la droite AB est éloignée de l'origine. Si B devient meilleur marché (OB plus long) le point de tangence changera, mais lentement, jusqu'à ce qu'il y ait deux points de tangence, et si B devient encore meilleur marché, l'individu changera subitement de profession, passant de la position I à une position sur ou dans le voisinage de l'axe A.

Les nombres placés sur les lignes d'indifférence pour

(1) La tangence doit être telle que la courbe soit du même côté de la ligne droite que l'origine. Les autres types de tangence correspondent à un équilibre instable.

la production croissent indéfiniment par valeurs négatives. Il n'y a d'ordinaire pas de point maximum ou minimum.

### § 17

Enfin, la consommation d'un article peut compléter ou concurrencer la production d'un autre. Un forgeron trouve peu d'utilité à des haltères ; la production des fers à cheval « concurrence » la consommation des haltères.

Les relations entre les articles concurrents et les articles complémentaires ne sont pas toujours aussi simples, car des articles peuvent être concurrents dans certaines combinaisons et complémentaires dans d'autres. Des recherches statistiques à ce sujet pourraient être faites avec profit et n'ont, semble-t-il, attiré que peu l'attention (1).

(1) Voir JEVONS, p. 135.

## CHAPITRE II

### Trois biens ou davantage.

#### § 1

Les procédés précédents s'appliquent sans aucune espèce de difficulté à trois dimensions. Supposons que l'ensemble du marché se mette en équilibre. Comme précédemment congelons, en pensée, cet équilibre, sauf en ce qui concerne trois biens A, B, et C. Nous obtenons alors, comme précédemment, une somme déterminée de monnaie disponible pour l'achat de A, B, et C. Construisons dans l'espace trois axes perpendiculaires entre eux (OA, OB, OC). Imaginons que cet espace soit rempli d'une matière dont la distribution de la densité représente l'utilité totale de A, B, C pour un individu particulier I. Des portions de l'espace peuvent être « vides ». Le lieu des points représentant les combinaisons de A, B et C présentant une utilité donnée sera une *surface* d'indifférence. Tous les lieux semblables formeront une « famille » de surfaces concentriques, comme les tuniques d'un oignon, autour d'un ou de plusieurs points de maxima.

Portons sur l'axe A, OA égal à autant d'unités de A que l'on en peut acheter avec la somme dont dispose I

pour l'acquisition de A, B, et C. Portons OB et OC définis de façons analogues. Traçons le plan ABC. C'est le lieu (1) de toutes les combinaisons de consommation de A, B et C achetables avec la somme de monnaie donnée. C'est un « plan de revenu partiel ». Son point de tangence avec une surface indiquera la combinaison choisie. Une *normale* en ce point indique la « direction maximum », et ses composantes A, B et C sont les utilités marginales, proportionnelles aux prix de A, B et C.

## § 2

Les distributions de l'utilité peuvent être très compliquées. Si les trois articles sont des succédanés comme l'avoine, le blé et le seigle, les surfaces d'indifférence peuvent être presque planes et ne permettre que de faibles changements de l'orientation du plan de revenu partiel, cependant que chaque léger changement déplace considérablement le point de tangence (Cf. *fig. 20* dans le cas de deux dimensions). Si ce sont des articles complémentaires comme des collerettes, des parements et des nœuds, les surfaces d'indifférence sont disposées comme des cocons concentriques dirigés vers l'origine (Cf. *fig. 22* dans le cas de deux dimensions).

Mais les rapports d'utilité de trois articles peuvent être plus compliqués. Du thé, du café et du sucre, les deux premiers sont des succédanés, tandis que le troisième est complémentaire pour les deux autres. Si

(1) Son équation est en effet  $\frac{A}{OA} + \frac{B}{OB} + \frac{C}{OC} = 1$ , d'où

$$A \cdot \frac{50}{OA} + B \cdot \frac{50}{OB} + C \cdot \frac{50}{OC} = 50 \text{ ou } Ap. + Bp. + Cp. = 50.$$

cette triple relation de complément et de concurrence des articles était « parfaite », la distribution de l'utilité se localiserait dans un plan passant par l'origine et coupant les plans des coordonnées entre les axes « sucre » et « thé », ainsi qu'entre les axes « sucre » et « café ». On pourrait trouver divers caractéristiques d'une telle dépendance idéale d'utilité. Si la triple dépendance n'est pas « parfaite », le plan en question se gonfle en un disque plat ou, plutôt, en une famille de disques concentriques ; la triple variation des prix et ses effets sur les quantités relatives des trois articles (c'est-à-dire sur la position du point de contact) peut être analysée avec leur aide. On peut imaginer des cas bien plus compliqués, et il en existe en réalité.

### § 3

Si nous supposons pour un instant qu'il n'y ait que trois biens sur le marché, l'étude précédente rend complètement compte de l'équilibre sur ce marché.

Pour le faire voir rapidement supposons que l'espace soit rempli d'une densité d'utilité donnée pour I, qu'une autre distribution de l'utilité superposée, mais différente, corresponde à II, et ainsi de suite. Englobons la production. Si une personne est tout à la fois un consommateur et un producteur d'un même article, c'est de la consommation ou de la production nette qu'il faut faire état, et la densité correspond à l'utilité ou à la désutilité totale de ce montant net. Les plans précédemment désignés sous le nom de plans de revenu partiel peuvent alors être appelés des « plans de revenu et de dépense totaux », et ils *doivent tous passer par l'origine* (1) (OI, *fig. 27* dans le cas de deux dimensions). Les

(1) En effet, puisque les recettes balancent les dépenses, si  $A_1$ ,

« directions maxima » (normales aux plans auxquels elles correspondent) étant parallèles, ces plans *doivent se confondre en un seul*. Le point de ce plan choisi par I sera le point de tangence avec une surface d'indifférence relative à I. De même pour II, III, etc. On pourrait trouver de tels points quelle que soit l'orientation du plan. Mais le plan doit prendre une *orientation*

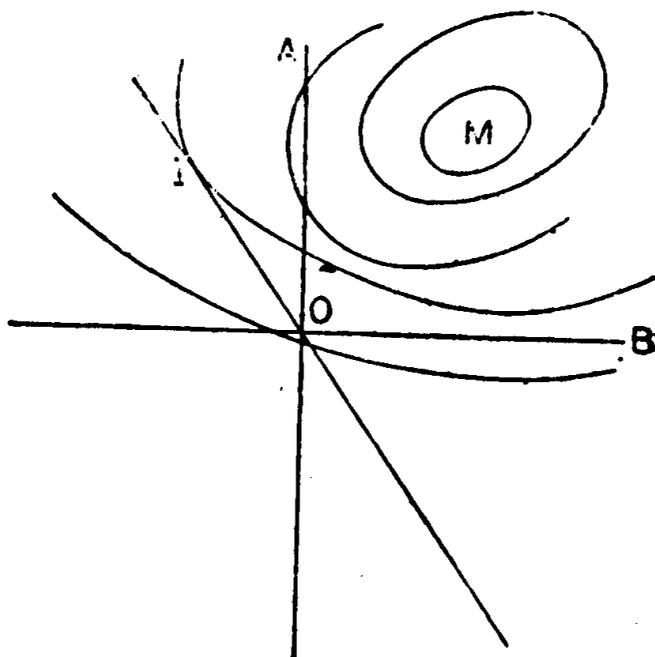


Fig. 27.

*telle que le centre de gravité de ces points soit l'origine.* En d'autres termes, la somme algébrique de toutes les coordonnées correspondant à la consommation de A doit être égale à la somme correspondant à la production. De même la somme algébrique des coordonnées de B et celle de C doivent être chacune égales à zéro.

$B_1, C_1$ , représentent les quantités nettes consommées ou produites par I, celles consommées étant traitées comme positives et celles produites comme négatives, la valeur-monnaie totale doit être zéro, i. e.

$$A.p. + B.p. + C.p. = 0$$

ce qui est l'équation d'un plan passant par l'origine.

Ainsi, d'après l'étude géométrique qui vient d'être faite, l'équilibre sur un marché comportant trois biens est déterminé quand :

1° Les combinaisons de tous les individus sont situées dans un même plan passant par l'origine (les ventes et les achats de chaque individu se compensent) ;

2° La combinaison de chaque individu correspond au point où ce plan est tangent à une surface d'indifférence relative à cet individu (le point d'utilité nette maximum) ;

3° Les points sont répartis dans le plan de manière à faire de l'origine leur centre de gravité (la production et la consommation de chaque bien se balancent).

D'où il résulte au point de vue géométrique que les « directions maxima » sont parallèles, leurs composantes (utilités marginales) relatives aux différents individus proportionnelles, et que cette proportion est celle qui correspond à l'orientation du plan (rapport des prix).

#### § 4

Lorsque cet équilibre est réalisé, faisons passer par le point de tangence I représentant la combinaison de consommation de I une section parallèle au plan des axes A et B. L'intersection de ce plan et du plan de revenu total est une ligne droite qui n'est autre que la droite de revenu partiel du chapitre I, § 11, et son intersection avec les surfaces d'indifférence redonne les courbes d'indifférence du chapitre I, § 10.

#### § 5

Nous n'avons provisoirement envisagé que trois biens parce que nous n'avons que trois dimensions pour les

représenter. Une représentation complète de l'interdépendance des utilités nécessiterait  $m$  dimensions, car l'utilité d'un bien quelconque  $A$  est sujette à  $m$  variations indépendantes correspondant à des changements de l'un quelconque des  $m$  biens, quoique (en général) les changements de la quantité  $A$  elle-même exercent une influence prépondérante.

Il est une conception diabolique curieuse, c'est celle de la « quatrième dimension ». Pour le public tout l'intérêt consisterait à prouver qu'elle « existe ». Son origine historique et son utilité actuelle résident dans l'interprétation d'une quatrième variable indépendante, i. e. dans la représentation de relations précisément du type qui nous occupe actuellement. Il semble malheureusement qu'il soit réservé aux mathématiciens de s'assimiler cette notion.

### § 6

Dans cet espace à  $m$  dimensions prenons  $m$  axes perpendiculaires les uns aux autres correspondant aux  $m$  biens  $A, B, C, \dots M$ . Remplissons l'espace d'une densité d'utilité totale. Faisons passer par l'origine un plat à  $(m-1)$  dimensions [ $m-1$  flat] (1) en lui donnant l'orientation convenable étant donné les prix. Les lieux d'indifférence sont des espaces à  $(m-1)$  dimensions [ $(m-1)$  spaces] (incurvés). Le point de tangence d'un plat à  $(m-1)$  dimensions avec un lieu d'indifférence à  $(m-1)$  dimensions [ $(m-1)$  indifference locus] indiquera la combinaison de consommation et de production totales relative à un individu. Une normale au plat à  $(m-1)$  dimensions et aux lieux d'indifférence à  $(m-1)$  dimensions en

(1) I. e. un espace Euclidien à  $(m - 1)$  dimensions qui est à l'espace à  $m$  dimensions ce qu'est le plan à notre espace.

leur point de tangence montre sa « direction maximum », et ses composantes les utilités marginales de tous les articles.

Ces idées ne sont pas aussi étrangères qu'elles semblent l'être. Cet espace est simplement le « monde économique » dans lequel nous vivons. Souvent nous parlons de dépenser un revenu dans tel ou tel « sens » pour exprimer des rapports de quantités de biens. Quand on parle du « point » atteint par un consommateur ou un producteur, l'emploi de ce mot est une tentative spontanée de groupement dans notre pensée de *m* grandeurs différentes. On vise à ce résultat en les considérant comme les coordonnées d'un « point » du monde économique. C'est l'application à l'économie de ces idées de l'« algèbre multiple » qui ont tant ajouté (1) à l'élégance et à la simplicité de la géométrie et de la physique mathématique.

### § 7

Ces conceptions fournissent les éléments d'une compréhension plus serrée de la nature de l'équilibre économique. Pour que l'équilibre soit déterminé dans l'ensemble du système y compris la production :

1° La distribution de l'utilité doit être indiquée pour chaque individu ;

2° Les « directions maxima » doivent être semblables pour tous les individus et les mêmes pour la production et la consommation ;

3° L'origine doit être le centre de gravité de tous les points individuels ; c'est-à-dire que la somme de toutes les coordonnées correspondant à A relative à la consom-

(1) Voir J.-W. GIBBS, *Multiple Algebra*, Proceedings Amer. Assoc. Adv. Sci., vol. xxxv.

mation doit être égale à la somme relative à la production, et de même pour B, C, etc. ;

4° Le plat commun au revenu et à la dépense doit passer par l'origine : c'est-à-dire que la valeur-monnaie de la production et celle de la consommation de chaque personne doivent se compenser.

### § 8

En faisant passer des sections successives par le point I, on peut limiter la discussion à aussi peu de variables qu'on le désire. On peut ainsi choisir *trois* variables quelconques et se placer dans l'espace réel comme précédemment (cf. § 4).

### § 9. — Interprétation analytique.

Pour ceux qui sont familiers avec l'algèbre multiple, c'est-à-dire avec l'étude des quaternions d'Hamilton, l'« Ausdehnungslehre » [système d'extension] de Grassman, ou bien l'analyse vectorielle du Professeur J. Willard Gibbs, à la simplification introduite par le précédent emploi de la géométrie correspondra une simplification frappante de l'exposé analytique (1).

Soit I, II, ... N, les vecteurs des points I, II, ... N à partir de l'origine. Soit  $U_1, U_2, \text{etc.}$ , les vecteurs représentant l'utilité totale aux points I, II, etc. Soit  $\nabla U_1, \nabla U_2, \text{etc.}$ , les vecteurs représentant en grandeur et direction le taux maximum d'accroissement de l'utilité aux points I, II, etc. (i. e. dans les « directions maxima »).

Les conditions de l'équilibre énoncées au § 7 deviennent :

(1) Voir J.-W. GIBBS, *Vector Analysis*, p. 16, § 50.

- (1)  $\nabla U_1 = F(I); \nabla U_2 = F(II); \dots \nabla U_n = F(N)$
- (2)  $\nabla U_1 \propto \nabla U_2 \propto \nabla U_3 \propto \dots \propto \nabla U_n$
- (3)  $I + II + III + \dots + N = 0$
- (4)  $I \cdot \nabla U_1 = II \cdot \nabla U_2 = \dots = N \cdot \nabla U_n = 0$

La première équation représente les diverses distributions de l'utilité. La seconde signifie que les « directions maxima » sont semblables; la troisième que les quantités de chaque bien produites et consommées se compensent, et la quatrième que pour chaque individu la valeur de sa production et celle de sa consommation se compensent (1).

(1) Les équations scalaires que remplacent les équations vectorielles précédentes peuvent en être déduites sans difficulté. Soit  $a, b, c, \dots$ , des vecteurs unités le long des axes A, B, C, etc. Multiplions  $\nabla U = F(I)$  par  $a, b, c, \dots$  respectivement. Nous obtenons  $m$  équations de la forme  $\nabla U_1 \cdot a = F(I) \cdot a$  ou :

$$\frac{dU}{dA_1} = F(A_1, B_1, C_1, \dots, M_1)$$

De même  $m$  équations scalaires sont contenues dans  $\nabla U_2 = F(II)$ , etc.

De plus on tire de (2) étant donné que  $\nabla U_1 \propto \nabla U_2$ ,

$$\nabla U_1 \cdot a : \nabla U_1 \cdot b = \nabla U_2 \cdot a : \nabla U_2 \cdot b \text{ ou :}$$

$$\frac{dU}{dA_1} : \frac{dU}{dB_1} = \frac{dU}{dA_2} : \frac{dU}{dB_2}$$

De même pour  $C_1, D_1, \dots, M_1$ . De même pour  $\nabla U_3$ , etc.

En outre (3) donne  $I \cdot a + II \cdot a + III \cdot a + \dots + N \cdot a = 0$  ou

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = 0$$

De même pour B, C, ... M, ce qui fait  $m$  équations.

Finalement : Il est clair que

$$I = A \cdot a + B \cdot b + \dots + M \cdot m \text{ et que } \nabla U_1 = \frac{dU}{dA_1} a + \frac{dU}{dB_1} b + \dots + \frac{dU}{dM_1} m.$$

En substituant ces valeurs dans  $I \cdot \nabla U_1 = 0$  nous avons après

## § 10

On voit qu'au point de vue analytique l'étude de biens interdépendants ne diffère de celle de biens indépendants qu'en ce que les équations qui représentent les fonctions comportent plus de lettres ; i. e. que l'on a

$$\frac{dU}{dA_1} = F(A_1, B_1, \dots, N_1) \text{ au lieu de } = F(A_1)$$

Toutes les autres équations sont exactement les mêmes que dans la Partie I. En réalité les équations de ces fonctions sont, pour ainsi dire, les formules résiduelles, elles renferment toutes les conditions du problème laissées de côté.

Les utilités marginales sont (comme dans la Partie I) dans un rapport continu qui est le rapport des prix. Il y a cependant des cas particuliers qui ne rentrent pas dans les hypothèses de la Partie I, à savoir : les cas qui se produisent lorsque pour un ou plusieurs articles l'utilité marginale ne correspond à rien.

Si deux articles sont des articles complémentaires parfaits, comme le canon et la détente, il n'existe rien de semblable à l'utilité marginale du canon seul. Il existe, toutefois, une utilité marginale pour l'ensemble du canon et de la détente. Or il y a des désutilités margi-

avoir effectué la multiplication et en nous souvenant que  $a.a = 1$  et que  $a.b = a.c = \dots = b.c = \dots = 0$ ,

$$A_1 \cdot \frac{dU}{dA_1} + B_1 \cdot \frac{dU}{dB_1} + \dots + M_1 \cdot \frac{dU}{dM_1} = 0$$

ou, puisque les prix sont proportionnels aux utilités marginales :

$$A_1 p_a + B_1 p_b + \dots + M_1 p_m = 0$$

De même pour II, III, etc. ce qui fait  $n$  équations.

Réciproquement on peut déduire les équations vectorielles des équations scalaires.

nales séparées pour la production du canon et pour celle de la détente. Comment faut-il introduire toutes ces quantités dans notre proportion continue des utilités marginales ?

Supposons pour un instant qu'il n'existe aucune difficulté de cette sorte. La proportion serait pour chaque individu exactement la même que précédemment (Partie I, ch. IV, § 10) et pourrait être exprimée comme suit [G et  $g$  pour le canon, T et  $t$  pour la détente] :

$$-\frac{p_g}{\frac{dU}{dG_k}} = -\frac{p_t}{\frac{dU}{dT_k}} = \left| \frac{p_g}{\frac{dU}{dG_k}} \right| = \left| \frac{p_t}{\frac{dU}{dT_k}} \right| = \left| \frac{\frac{p_g}{\frac{dU}{dG_k}} + \frac{p_t}{\frac{dU}{dT_k}}}{\frac{dU}{d(G \text{ et } T)_k}} \right| = \frac{p_g + p_t}{\frac{dU}{d(G \text{ et } T)_k}}$$

Les deux derniers membres de cette équation sont nouveaux et demandent un mot d'explication. L'avant-dernier est une conséquence évidente des principes de composition et de division. Son dénominateur représente l'utilité marginale de l'ensemble du canon et de la détente et il est écrit  $\frac{dU}{d(G \text{ et } T)_k}$  dans le dernier membre.

Mais les quantités qui sont marquées d'un astérisque sont celles de l'existence desquelles on ne peut plus parler dans notre hypothèse. Par suite, tous les membres de l'équation contenant un astérisque disparaissent et il ne nous reste que le premier, le second et le dernier membres. En d'autres termes, si deux articles sont parfaitement complémentaires, leur utilité marginale *collective* est avec leur prix *collectif* dans le même rapport que la désutilité marginale de production de l'un ou de l'autre des articles avec son prix (pris négativement) ou que toute autre utilité marginale avec le prix correspondant.

De même si deux articles sont des articles complémentaires parfaits au point de vue du producteur, comme le cuir et la viande de bœuf, leur désutilité marginale collective est à leur prix collectif comme l'utilité marginale de l'un ou de l'autre est à son prix (pris négativement) ou comme toute autre utilité marginale est au prix correspondant.

Si deux articles sont tels qu'ils soient parfaitement complémentaires tout à la fois à l'égard de la production et à l'égard de la consommation, et ce dans les mêmes rapports, non seulement ils n'ont pas d'utilité ou de désutilité séparée, mais ils peuvent n'avoir pas de prix séparés. Ainsi, la tête, les membres, la queue et les autres parties d'un cheval sont produits ensemble et consommés (utilisés) ensemble ; ils n'ont pas de prix séparés.

Il ne peut exister d'articles qui soient des articles complémentaires parfaits tout à la fois à l'égard de la production et à l'égard de la consommation, mais qui soient produits dans un rapport et consommés dans un autre.

Supposons que deux articles soient tels que la production de l'un soit parfaitement complémentaire de la consommation de l'autre. Supposons, par exemple, que la production d'une tonne de fer entraîne la consommation d'une tonne de houille et que la consommation d'une tonne de houille implique la production d'une tonne de fer. Dans ce cas on ne saurait dire que le producteur de fer profite d'un surcroît de charbon tant qu'il ne produit pas plus de fer ni qu'il augmente la désutilité de production du fer sans consommer plus de charbon. Quelles sont alors les utilités et les désutilités qu'il éprouve ? On peut dire qu'il éprouve une désutilité marginale collective de production du fer et de consommation du charbon. Cette désutilité « collective »

est à la *différence* des prix du fer et du charbon comme l'utilité marginale que présente pour lui un bien quelconque est au prix de ce bien.

Des considérations analogues s'appliquent à trois ou à un plus grand nombre d'articles complémentaires parfaits. Tant que ces articles ne sont pas *parfaitement* complémentaires, il n'y a pas de nécessité de substituer des utilités collectives aux utilités isolées. En fait le nombre des articles réellement *parfaitement* complémentaires est relativement faible.

Si deux articles sont des succédanés « parfaits » à l'égard de la consommation et que le rapport de leurs utilités marginales soit le même pour tous les consommateurs, alors qu'au point de vue d'un producteur ils ne sont point des succédanés « parfaits », les consommateurs fixent le rapport de leurs prix (c'est-à-dire de leurs utilités marginales) et les producteurs en produisent des quantités en conséquence. Mais les quantités de chacun consommées par les différents consommateurs sont entièrement indéterminées. Ainsi le lait de chaque vache peut être regardé comme un bien séparé. Peu importe au consommateur le lait qu'il boit, et des causes tout à fait accidentelles fixent la quantité qu'il en reçoit de chaque vache ; cependant le producteur de lait détermine la quantité qui en est produite par chacune.

Si deux articles sont des succédanés parfaits tout à la fois à l'égard de la production et à l'égard de la consommation, et que le rapport de leurs utilités marginales et le rapport de leurs désutilités marginales soient le même, leur prix seront dans ce rapport, mais les quantités *relatives* de chacun, produites et consommées, sont entièrement indéterminées (telles sont, par ex., les couleurs dans la reliure d'un livre).

Si les deux articles sont des succédanés parfaits et que le rapport de l'utilité marginale du premier à celle

du second soit pour tout consommateur plus grande que le rapport de leurs désutilités marginales pour n'importe quel producteur, le premier bien seul sera produit et consommé et son prix sera déterminé comme pour un bien quelconque.

En général, si deux articles sont des succédanés parfaits, mais que le rapport de leurs utilités marginales et le rapport de leurs désutilités marginales soient différents pour des individus différents, ceux pour qui le rapport de l'utilité marginale du premier à celle du second est plus grand que le rapport de leurs prix ne consommeront que le premier, ceux pour qui le rapport d'utilité est moindre que le rapport de prix ne consommeront que le second, ceux pour qui le rapport de désutilité est plus grand que le rapport de prix ne produiront que le second, ceux pour qui le rapport de désutilité est moindre que le rapport de prix ne produiront que le premier (1). Dans ce cas le prix de chaque article est déterminé exactement comme d'habitude, mais pour chaque individu qui ne consomme ou ne produit pas l'un des deux articles, l'utilité ou la désutilité marginale de celui-ci ne correspond plus à rien et disparaît des équations ; exactement de même que dans la Partie I une citerne peut être entièrement en dehors du bassin.

(1) Si pour un certain nombre de producteurs et de consommateurs le rapport d'utilité ou de désutilité coïncide avec le rapport de prix, les quantités relatives de chaque article, produites et consommées, sont indéterminées dans les limites de cette coïncidence.

## CHAPITRE III

### Analogies mécaniques.

#### § 1

Pour chaque individu figurant dans le « monde économique », imaginons un vecteur porté le long de chaque axe [à l'effet de représenter l'utilité marginale dans ce « sens »]. L'utilité marginale de consommation de ( $a$ ) est un vecteur positif dirigé suivant l'axe A, la désutilité marginale de production de ( $a$ ) (ou la désutilité du versement de monnaie en échange de ( $a$ ), est un vecteur *égal* dirigé en sens inverse. De même les utilités et les désutilités marginales suivant tous les axes sont égales et opposées.

Ceci correspond à l'équilibre mécanique d'un point dont la condition est que les forces composantes suivant tous les axes rectangulaires soient égales et opposées.

Nous pouvons d'ailleurs combiner toutes les utilités marginales et obtenir un vecteur dont la direction fasse connaître la direction dans laquelle un individu recueillerait le plus d'utilité. De même pour le vecteur de désutilité, qui indique la direction dans laquelle un individu rencontrerait le plus de désutilité de production. Ces deux vecteurs sont (pour une raison géométrique évidente) égaux et opposés.

Ce qui précède est entièrement analogue aux lois de composition et de résolution des forces.

Si les utilités et les désutilités marginales sont ainsi en équilibre, le « bénéfice » est nécessairement maximum. Cela résulte directement de l'analyse et correspond rigoureusement à l'application de l'analyse à la physique qui montre qu'à l'équilibre la compensation des forces implique la réalisation d'un maximum d'énergie. L'énergie est alors le produit de la force par l'espace, exactement comme le bénéfice est le produit de l'utilité marginale par la quantité de bien.

## § 2

<i>En Mécanique</i>			<i>En Economique</i>
Un point	correspond à		Un individu.
Espace	«	«	Bien.
Force	«	«	Ut. ou désutilité marg.
Travail	«	«	Désutilité.
Energie	«	«	Utilité.

Travail ou Energie = force  $\times$  espace.

La force est un vecteur (dirigé dans l'espace).

Les forces s'ajoutent par addition de vecteurs (« parallélogramme des forces »).

Le travail et l'énergie sont des quantités scalaires.

Le travail total fourni par un point en passant de l'origine à une position donnée est l'intégrale des forces résistantes le long de tous les axes des espaces (les forces résistantes sont celles qui sont dirigées vers l'origine) multipliées par les distance parcourues le long de ces axes.

Désut. ou Ut. = ut. marg.  $\times$  bien.

L'ut. marg. est un vecteur (dirigé dans le bien).

Les ut. marg. s'ajoutent par addition de vecteurs (parallélogramme des ut. marg.).

La désut. et l'ut. sont des quantités scalaires.

La désutilité totale éprouvée par un individu, en prenant une certaine position dans le « monde économique », est l'intégrale des désut. marg. le long de tous les axes des biens (les désut. marg. sont dirigées vers l'origine) multipliées par les distances parcourues le long de ces axes.

L'énergie totale (le travail fourni au point) peut être définie comme la même intégrale par rapport aux *forces propulsives*.

L'énergie nette du point peut être définie comme l'« énergie totale » diminuée du « travail total ».

L'équilibre se réalisera au point où l'énergie nette est maximum ; ou l'équilibre se réalisera au point où les forces impul. et les forces résist. suivant chaque axe seront égales.

(Si l'on soustrait l'« énergie totale » du « travail total » au lieu de *vice versa*, la différence est le *potentiel*, et elle est minimum.)

L'utilité totale recueillie par l'individu est la même intégrale par rapport aux *utilités marg.*

L'ut. nette ou *bénéfice* de l'individu est l'« utilité totale » diminuée de la « désutilité totale ».

L'équilibre se réalisera au point où le bénéfice est maximum ; ou l'équilibre se réalisera au point où les ut. marg. et les désut. marg. suivant chaque axe seront égales.

(Si l'on soustrait l'« ut. totale » de la « désut. totale » au lieu de *vice versa*, la différence peut être appelée la *perte*, et elle est minimum.)

## CHAPITRE IV

### L'utilité en tant que quantité.

#### § 1

Dans la Partie I, ch. I, l'utilité fut définie par rapport à un seul individu. Pour étudier les prix et la répartition il n'est pas nécessaire de fixer le sens du rapport d'utilités relatives à deux hommes différents. Apparemment Jevons n'en fit pas la remarque. Auspitz et Lieben la firent. George Darwin la fit également (1).

#### § 2

Il serait sans doute utile dans des recherches éthiques et peut-être dans certains problèmes économiques de déterminer comment comparer des utilités relatives à deux individus. Nous ne sommes pas obligé de le faire. Quand elle se fait, cette comparaison se fait sans doute à l'aide d'étalons objectifs. Si des personnes semblables à la plupart des égards se manifestent les unes aux autres leur satisfaction par des gestes, un langage, une expression de physionomie et une attitude générale

(1) *The Theory of Exchange Value. Fortnightly Review*, nouvelles séries, xvii, 243.

semblables, nous regardons leur satisfaction comme tout à fait la même. Ce qui se passe dans le monde « noumenal » est toutefois un mystère. Si d'autre part des différences d'âge, de sexe, de tempérament, etc. interviennent, la comparaison devient relativement difficile et arbitraire. On ne pourrait tirer que très peu de choses de la comparaison du désir d'un Fuégien pour un coquillage avec celui d'un conchyliologiste d'une université pour le même objet, et il n'y aurait sûrement rien à tirer du tout de la comparaison des désirs du coquillage lui-même avec ceux de l'un ou de l'autre de ses bourreaux.

### § 3

Alors que la statistique devient une science importante, il se peut que la richesse d'une époque ou d'un pays soit comparée à celle d'un autre en tant que « bénéfice » et non en tant que valeur-monnaie. Si le produit commercial annuel des E. U. était en 1880 de \$ 9.000.000.000 (1) et que du fait de l'accroissement des facilités de production les prix se soient tellement abaissés qu'en 1890 le produit ne soit évalué (par exemple) qu'à \$ 8.000.000.000, cela prouverait un bénéfice et non une perte. Le pays le plus riche possible serait celui où toutes les choses seraient aussi utiles que l'eau, ne présenteraient pas de valeur et seraient estimées au total *zéro*. Or la valeur-monnaie donne simplement la mesure de l'utilité avec un étalon marginal qui varie constamment. Une comparaison statistique est nécessairement toujours grossière, mais elle peut être meilleure que cela. Un statisticien pourrait partir de ces utilités dans l'appréciation desquelles les hommes se ressemblent le plus

(1) EDWARD ATKINSON, *Distribution of Products*, p. 141.

— utilités d'aliments — et de ces désutilités dans l'appréciation desquelles ils se ressemblent le plus — telles que les désutilités des différentes sortes de travail manuel. Avec ces étalons il pourrait mesurer et corriger l'étalon monétaire (1), et si les courbes d'utilité pour diverses catégories d'articles étaient contruites, il pourrait établir de grossières statistiques d'utilité totale, de bénéfice et de valeur-monnaie qui auraient une portée considérable. Les hommes se ressemblent beaucoup dans leur digestion et dans leur fatigue. Si l'on a établi un étalon de nourriture ou de travail, on peut aisément l'appliquer à la mesure d'utilités dans l'appréciation desquelles les hommes sont différents les uns des autres, telles que celles des vêtements, des maisons, des meubles, des livres, des œuvres d'art, etc.

#### § 4

Ces questions toutefois n'ont pas à trouver place ici. Au lieu d'ajouter à la signification du mot utilité, faisons le contraire et dépouillons-le de tous ses attributs non indispensables pour atteindre notre but : la détermination des prix et de la répartition, qui sont des faits objectifs. La définition 3, Partie I, chapitre I, § 4, ne conduisait à des résultats uniformes que dans l'hypothèse où l'utilité de chaque bien était indépendante des quantités des autres. Des hypothèses semblables sont nécessaires en géométrie. Une unité de longueur est un yard. Un yard est la longueur d'une barre-étalon à Londres. Pour l'utiliser il faut supposer que sa longueur n'est pas fonction de sa position et qu'elle ne dépend pas des

(1) Cf. EDGEWORTH, « On the method of ascertaining and measuring variations in the value of the monetary standard ». *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1887.

changements de longueur des autres corps. Si la terre se contracte nous pouvons mesurer sa contraction avec une règle de un yard pourvu que cette règle ne se soit pas contractée également par une manifestation nécessaire de la modification de la terre. La définition 3 était indispensable dans la Partie I pour donner la signification aux citernes qui y sont utilisées. Une telle définition est indispensable aux études de Gossen, Jevons, Launhardt, Marshall et de tous les auteurs qui emploient des coordonnées. Néanmoins elle n'est pas nécessaire dans l'étude qui fait l'objet de la Partie II.

### § 5

Sur la figure 28 on a tracé les « lignes de force » perpendiculaires aux lieux d'indifférence. Les *directions* de ces lignes de force figurent seules dans les formules du ch. II, § 9 qui déterminent l'équilibre. Seules les *directions* sont donc importantes. Il en résulte que, en tant que l'on ne se préoccupe que de la détermination objective des prix et de la répartition, peu importe la longueur de la flèche en un point en comparaison d'un autre. Les rapports des composantes en un point ont de l'importance, mais ces rapports sont les mêmes quelle que soit la longueur de la flèche. Ainsi nous pouvons faire abstraction de la densité de l'utilité totale et concevoir le « monde économique » comme rempli uniquement de lignes de force ou de « directions maxima ».

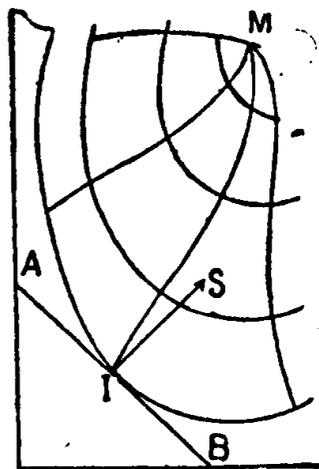


Fig. 28.

## § 6

Quand bien même nous attribuerions des significations précises aux longueurs de ces flèches (de telle sorte que l'équation  $\nabla U_1 = F(I)$  voudrait dire non seulement qu'à chaque point du monde économique correspond une « direction maximum » déterminée, mais aussi que le *taux* d'accroissement de l'utilité ou la longueur du *vecteur* dirigé suivant cette ligne est donnée), alors même l'existence d'une fonction primitive complète  $U_1 = \varphi(I)$  serait soumise à certaines conditions (1). Ces conditions sont : 1° que les lignes de force soient disposées de telle sorte que l'on puisse construire des lieux (surfaces dans le cas de deux dimensions, *espaces* à  $m - 1$  dimensions dans le cas de  $m$  dimensions) qui leur soient perpendiculaires, et 2° que le taux de passage d'un lieu au voisin en suivant une ligne de force soit pour toutes les positions entre les deux lieux inversement proportionnel à la valeur de  $\nabla U_1$  déjà assignée à ces positions. Si  $\nabla U_1$  n'est pas réparti de la manière précédente, l'intégration est impossible et *il n'existe pas de quantité telle que l'utilité totale ou le bénéfice.*

## § 7

Quand bien même l'intégration serait possible, il y aurait encore une constante arbitraire. Nous pourrions même prétendre que la désutilité totale excède l'utilité totale et que tout ce que l'homme peut faire c'est de minimiser le désagrément au lieu de rendre maximum

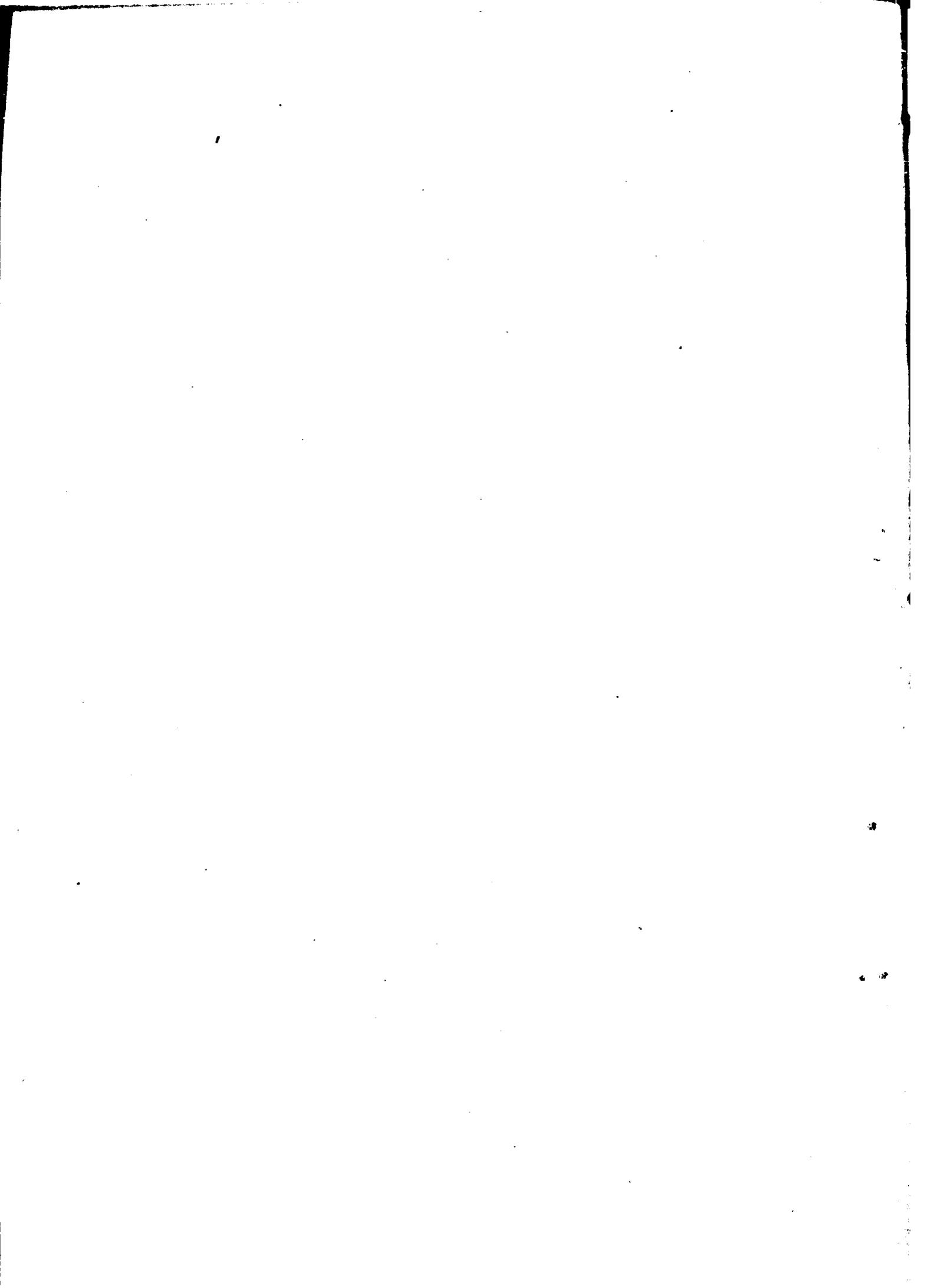
(1) OSBORNE, *Differential Equations*, p. 12.

l'agrément. En d'autres termes, si nous entrons dans l'hédonisme, il n'y a rien dans les recherches économiques pour nous faire opter entre l'optimisme et le pessimisme.

### § 8

Ainsi, si nous recherchons seulement la genèse des *faits objectifs de prix et de répartition des biens*, quatre des attributs de l'utilité en tant que quantité ne sont nullement indispensables : 1° qu'il soit possible de comparer l'utilité recueillie par une personne à celle recueillie par une autre, 2° qu'il soit possible pour un même individu de comparer l'utilité correspondant à une combinaison de consommation à celle correspondant à une autre, ou celle correspondant à un instant donné à celle correspondant à un autre, 3° même si cela était possible, l'utilité totale et le bénéfice peuvent n'être pas intégrables, 4° même s'ils l'étaient, il ne serait pas nécessaire de déterminer les constantes d'intégration.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE



## APPENDICE I

### REMARQUES DIVERSES SUR LA PARTIE I

#### I. — MANQUEMENT D'ÉQUATIONS

Jevons (p. 118) étudie le manquement d'équations dans le cas de l'échange simple. Il est clair qu'un tel manquement doit fréquemment se produire dans le cas d'échanges complexes, mais personne ne parait s'en être préoccupé. Il semblerait à première vue que ceci devrait introduire un élément d'indétermination dans nos résultats. Il n'en est cependant pas ainsi, à moins que nous ne fassions état d'articles qui ne sont ni produits ni consommés ; dans ce cas, le plus haut prix qu'un consommateur soit disposé à payer le premier élément infinitésimal est moindre que le plus bas prix auquel qui que ce soit produise cet élément ; il n'y a ni production ni consommation, et le mot prix n'a pas de sens déterminé. Dès qu'une modification des conditions industrielles, c'est-à-dire des types des citernes, ou de leur nombre, fait de cette inégalité une égalité, l'article dont il s'agit entre dans nos équations.

Supposons que A soit produit par  $n_\pi$  personnes, consommé par  $n_k$  et échangé ou détaillé par  $n_e$  ;  $n_\pi$ ,  $n_k$  et  $n_e$  étant chacun moindre que  $n$  (le nombre des individus). Il résulte d'ailleurs de la nature de nos précédentes hypothèses que si l'un de ces trois nombres est plus grand que zéro, ils doivent l'être tous les trois, car dès l'instant où une chose figure dans le système, elle est sup-

posée être produite, échangée et consommée au cours de la période donnée.

Le nombre des personnes qui

ne produisent pas A est  $n - n_\pi$ ,

n'échangent pas A est  $n - n_\varepsilon$ ,

ne consomment pas A est  $n - n_k$ .

Le nombre des inconnues disparues des équations du ch. VI, § 2, est :

$3n - (n_\pi + n_\varepsilon + n_k)$  du type  $A_{\pi,1}, A_{\varepsilon,1}, A_{k,1}$ , etc.

et  $3n - (n_\pi + n_\varepsilon + n_k)$  du type  $\frac{dU}{dA_1}$ ,

ou  $6n - 2(n_\pi + n_\varepsilon + n_k)$  en tout.

Les équations manquant dans le premier groupe sont au nombre de zéro,

les équations manquant dans le second groupe sont au nombre de zéro,

les équations manquant dans le troisième groupe sont au nombre de  $3n - (n_\pi + n_\varepsilon + n_k)$ ,

les équations manquant dans le quatrième groupe sont au nombre de  $3n - (n_\pi + n_\varepsilon + n_k)$ ,

les équations manquant dans le cinquième groupe sont au nombre de zéro,

soit au total  $6n - 2(n_\pi + n_\varepsilon + n_k)$  en tout.

De la concordance de ces deux nombres il résulte qu'il ne peut y avoir de cas d'indétermination dans les hypothèses envisagées. Examinons la question d'un peu plus près.

Dans le cinquième groupe d'équations il y a en réalité  $n(3m - 1) \left(\frac{3m}{2}\right)$  équations distinctes, mais seules  $n(3m - 1)$  d'entre elles sont *indépendantes*. Quelles sont celles dont il faut faire choix, c'est une question de commodité. Nous pouvons nous arranger de manière à ce que chaque équation contienne  $p_{a,\pi}$ , par exemple, et écrire

$$p_{a,\pi} : p_{b,\pi} = \frac{dU}{dA_{\pi,1}} : \frac{dU}{dB_{\pi,1}} = \frac{dU}{dA_{\pi,2}} : \frac{dU}{dB_{\pi,2}} = \text{etc.}$$

$$p_{a,\pi} : p_{c,\pi} = \text{etc.}$$

. . . . .

$$p_{a,\pi} : p_{a,k} = , . . . . .$$

. . . . .

$$p_{a,\pi} : p_{a,\varepsilon} = , . . . . .$$

. . . . .

Or, des deux premières équations nous pouvons tirer par division

$$p_{b,\pi} : p_{c,\pi} = \frac{dU}{dB_{\pi,1}} : \frac{dU}{dC_{\pi,1}}$$

et rien ne s'oppose à ce que nous fassions de cette dernière équation l'une des  $n (3 m - 1)$  équations indépendantes, si  $A_{\pi,1}$  venait à « manquer ». Des  $n (3 m - 1) \frac{3 m}{2}$  équations distinctes nous sommes libre d'en choisir pour les utiliser  $n (3 m - 1)$  indépendantes quelconques ; et si dans ce choix il s'en trouve une qui à la suite de quelque changement dans les quantités vient à manquer, il nous faut modifier notre choix en sorte que les  $n (3 m - 1)$  nouvelles équations ne dépendent pas des grandeurs « manquantes ».

Cela se traduit dans le mécanisme de la manière suivante : quand une citerne est entièrement au-dessus de la surface du bassin (comme III C *fig.* 8) et qu'ainsi elle ne contient rien, la quantité du bien auquel elle correspond et son utilité « manquent ». Les leviers qui rendent les ordonnées proportionnelles aux ordonnées correspondantes relatives aux autres individus peuvent être bien plus nombreux que les leviers représentés sur les croquis précédents. Ainsi pour quatre citernes il peut y avoir six leviers (en reliant chaque paire), mais trois seulement sont nécessaires. Le « manquement » de certaines grandeurs ne rendra pas inutilisable un système de leviers primitivement choisi ; il aura simplement pour effet de rendre le nombre de ceux-ci plus grand qu'il n'est nécessaire.

## II. — COMPARAISON DES CITERNES ET GRAPHIQUES DE LA PARTIE I AVEC LES GRAPHIQUES DE JEVONS ET DE AUSPITZ ET LIBBEN

### § 1

Pour représenter géométriquement les relations entre la quantité d'un bien, son utilité marginale, son utilité totale et le bénéfice correspondant (deux quelconques de ces quatre quantités sont déterminées par une relation établie entre les deux autres), il suffit d'avoir une courbe plane d'une forme appropriée et de représenter deux quelconques des grandeurs économiques ci-dessus par deux grandeurs géométriques quelconques déterminées par la position de points sur la courbe.

Des nombreuses méthodes que comprend cette manière de procéder, la seule qui a été adoptée pour l'étude précédente, consista à représenter l'utilité marginale par l'ordonnée Cartésienne et le bien par l'aire limitée par la courbe, les axes de coordonnées et l'abscisse correspondant au point considéré.

### § 2

Le tableau suivant montre la corrélation entre ce système de coordonnées et ceux de Jevons et de Auspitz et Lieben :

	<i>Jevons</i>	<i>Auspitz et Lieben</i>	<i>Nouvelles courbes</i>
Bien.....	$= x_j$	$= x_a$	$= \int x dy$
Utilité marginale } }	$= y_j$	$= \frac{dy_a}{dx_a} = \text{tg } \theta = y$	
Utilité totale	$= \int y_j dx_j$	$= y_a$	$= \int yx dy$
Bénéfice....	$= \int y_j dx_j - x_j y_j$	$= y_a - x_a \frac{dy_a}{dx_a}$	$= \int yx dy - y \int x dy$

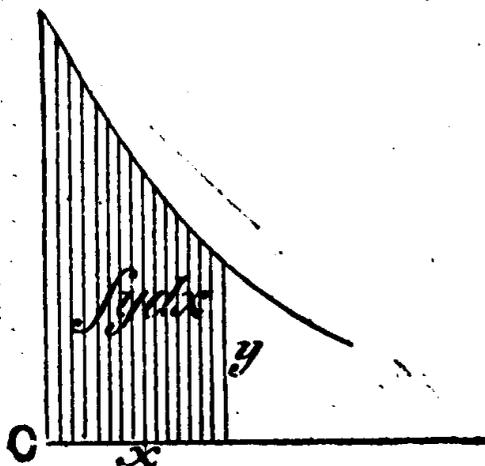


Fig. 29.

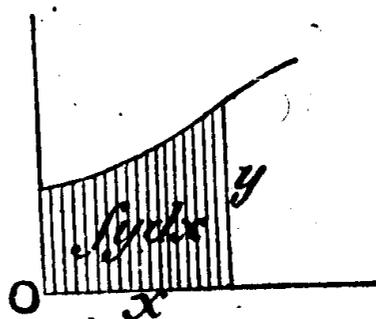


Fig. 30.

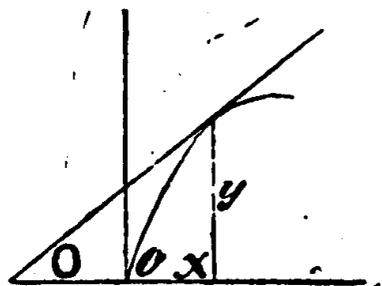


Fig. 31.

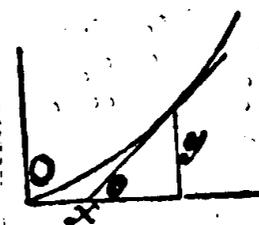


Fig. 32.

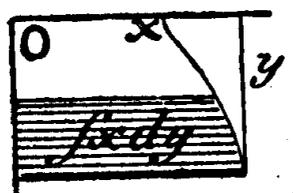


Fig. 33.

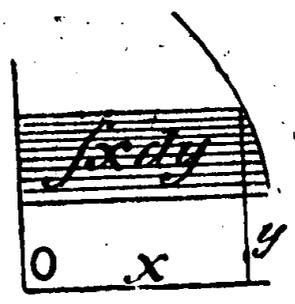


Fig. 34.

Ces courbes sont représentées sur les figures 29 et 30 (Jevons), 31, 32 (Auspitz et Lieben), et 33, 34 (nouvelles). Dans chaque cas la première correspond à la consommation et la seconde à la production (1).

(1) Jevons n'utilisa pas de courbe de production. Celle qui est tracée est destinée à compléter la comparaison. Les courbes « de Demande et d'Offre » de Fleeming Jenkin sont les mêmes que celles de Jevons, sauf que le prix remplace l'utilité marginale.

## § 3

Lorsque la courbe de Jevons se réduit à une ligne droite, (fig. 35), son équation est (1) :

$$x_j + qy_j = m$$

En recourant au tableau précédent pour le changement de  $x_j$  et de  $y_j$  nous trouvons, avec les coordonnées de Au spitzt Lieben :

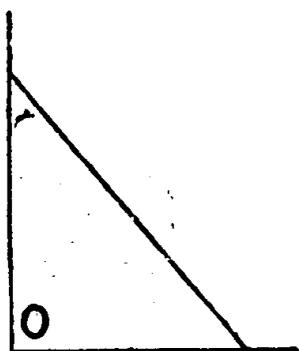


Fig. 35.

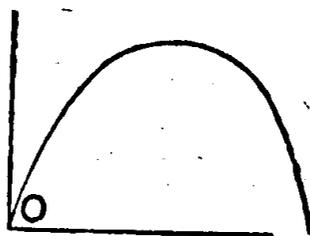


Fig. 36.

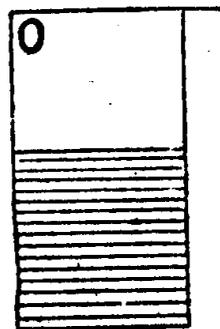


Fig. 37.

$$x_a - q \frac{dy_a}{dx_a} = m,$$

ce qui donne par intégration

$$2 qy_a = 2 m x_a - x_a^2 + C.$$

La courbe devant évidemment passer par l'origine,  $C = 0$ , et recourant à de nouvelles constantes nous pouvons écrire (2) :

$$y_a = \alpha x_a - \beta x_a^2,$$

ce qui est l'équation d'une parabole (fig. 36).

(1) Gossen, Launhardt, Whewell et Tozer (les deux derniers usent de l'analyse non géométrique) font appel à une hypothèse linéaire de ce genre, encore que les significations de leurs variables ne soient pas identiques.

(2) Equation de Launhardt.

Avec les nouvelles coordonnées les substitutions du tableau donnent :

$$\int x dy + qy = m$$

ce qui se réduit à

$$x = -q,$$

une ligne droite parallèle à l'axe des ordonnées (*fig. 37*).

La courbe d'Auspitz et Lieben ne fait pas ressortir la particularité de l'hypothèse (à savoir que la quantité de bien et l'utilité marginale varient proportionnellement). Si nous supposons que l'utilité marginale décroisse à un taux constant par rapport à des différences *secondes* de bien constantes, le nouveau graphique se réduit à une ligne droite :

$$x - qy - m = 0,$$

tandis que les autres courbes seraient :

$$(y_a + Ax_a + B)^2 = C(D - x_a)^3$$

et

$$x_j = E - F y_j - G y_j^2.$$

#### § 4

Le mérite du graphique de Jevons consiste dans l'emploi d'un système de coordonnées (le Cartésien) simple et familier ; c'est probablement le meilleur pour des problèmes élémentaires.

Le mérite du graphique de Auspitz et Lieben ainsi que d'une courbe « dérivée » (1) non indiquée ci-dessus consiste principalement dans la facilité avec laquelle on découvre les maxima, et dans la netteté de la correspondance des maxima avec l'égalité des utilités marginales. Il semble que le troisième mode de représentation montre plus clairement, grâce à la possibilité de l'appliquer aux mécanismes de la Partie I, l'*interdépendance* de nom-

(1) Dont les coordonnées cartésiennes sont  $x_a$  et  $y_a \frac{dy_a}{dx_a}$ .

breux biens appartenant à de nombreux individus et de leurs nombreuses utilités.

### § 5

Les propriétés essentielles à la courbe que nous avons adoptée sont :

*La première.* Que la courbe ne se laissera jamais intersecter deux fois par une ligne horizontale (i. e. qu'elle n'abandonnera pas une direction générale haut-bas), pour traduire le fait que pour la consommation l'utilité marginale décroît quand la quantité de bien croît, et que pour la production la désutilité marginale croît quand la quantité de bien croît.

*La seconde.* Que la courbe deviendra asymptote à l'axe des ordonnées et ce de telle sorte que l'aire comprise entre elle et l'axe soit finie, pour traduire le fait que à la limite de quantités de bien finies l'utilité marginale correspondant à la consommation décroît indéfiniment et que la désutilité marginale correspondant à la production croît indéfiniment (1).

*La troisième.* Les courbes commencent (correspondent à une quantité de bien égale à zéro) à une distance verticale finie de l'origine. (Ces conditions sont moins régulièrement vérifiées pour la production que pour la consommation, mais elles sont cependant à la base de toute notre étude).

### § 6

Il est évident qu'à la comparaison des formes de leurs courbes les différences et les particularités de différents articles se trouvent déterminées de la manière la plus précise par la forme de la courbe... avec bien plus de précision qu'il n'est nécessaire, eu égard aux données statistiques dont nous disposons actuellement.

Cela étant, examinons ce que représente l'abscisse de notre

(1) Cf AUSPITZ et LIEBEN, pp. 7 et 11.

courbe. Une couche infiniment mince  $x dy$  représente la quantité *supplémentaire* demandée (ou offerte) en présence d'une diminution (ou d'un accroissement) infinitésimale  $dy$  de l'utilité marginale. L'abscisse  $x$  est le rapport de la couche infinitésimale  $x dy$  à la modification infinitésimale,  $dy$ , du prix. C'est par conséquent le *taux d'accroissement de la quantité demandée* (1) (ou offerte) par rapport à la modification de l'utilité marginale. AM (figs. 2 et 3) est le taux initial. En nous reportant à II, § 2 de cette appendice, nous voyons que

$$\begin{aligned} x_j &= \int x dy \\ \text{D'où} \quad dx_j &= x dy \\ \text{Mais} \quad y &= y_j \text{ et } dy = dy_j \\ \text{D'où} \quad \frac{dx_j}{dy_j} &= x. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'abscisse de notre courbe est le *coefficient angulaire* de la courbe de Jevons, envisagée de l'axe des ordonnées.

Par suite, si la courbe de Jevons est assujettie à la condition d'être convexe, la nouvelle courbe doit simplement satisfaire à la condition que ses abscisses successives aillent en diminuant, etc., etc.

### § 7

Jusqu'à présent nous n'avons rien dit du mode de représentation de l'utilité totale et du bénéfice.

Si  $y_1$  est l'utilité marginale (qui peut être représentée par de la monnaie) à laquelle, dans la réalité, un consommateur cesse d'acheter,  $y_2$  celle à laquelle il commencerait tout juste à acheter, sa rente de consommateur ou bénéfice est (voir ch. I, § 8)

$$G = \int_{y_2}^{y_1} y x dy - y_2 \int_{y_2}^{y_1} x dy$$

(1) Cf. la note ch. IV, § 8, div. 3.

ou bien, en mesurant ce bénéfice avec le bien donné évalué à  $y_1$  cents (par exemple) par unité,

$$\frac{G}{y_1} = \int_{y_k}^{h_1} \frac{y}{y_1} x dy - \int_{y_k}^{y_1} x dy$$

On peut donner [de ce résultat une interprétation géométrique simple.

Sur la figure 38  $OA = y_k$  et  $OR = y_1$ .

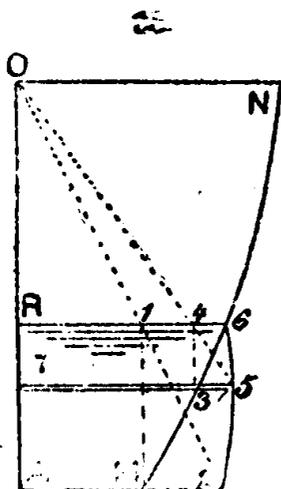


Fig. 38.

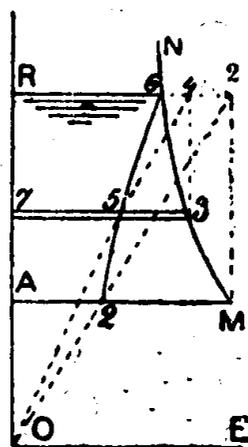


Fig. 39.

En partant du point 3 la construction pointillée, dont on saisit immédiatement le tracé, conduit à la détermination du point 5.

On a évidemment :  $\frac{75}{73} = \frac{O5}{O4} = \frac{O7}{OR} = \frac{y}{y_1}$  d'où  $75 = \left(\frac{y}{y_1} \cdot x\right)$ .

Supposons que 3 prenne toutes les positions de M à 6, alors 5 décrira une courbe 26.

L'aire balayée par la ligne 73 est évidemment  $\int_{y_k}^{y_1} x dy$ .

L'aire balayée par la ligne 75 est évidemment  $\int_{y_k}^{y_1} \left(\frac{y}{y_1} x\right) dy$ .

Par suite l'aire balayée par la ligne 35 est la différence de ces expressions ou  $G/y_1$ .

En d'autres termes, l'aire M26 représente le bénéfice mesuré en bien.

Ainsi, supposons qu'un individu achète une quantité de blé mesurée par RAM6 et que le blé, au cours RO, représente l'unité d'utilité. Seule la dernière couche R6 ne laisse aucun bénéfice. Pour une couche précédente 75 le prix payé en fait est OR alors que le prix qu'elle vaut est O7. La couche 73 peut être considérée comme accrue à ses yeux dans le rapport O7/OR, de telle sorte que, en l'acquérant pour moins qu'il n'était disposé à payer, il a gagné l'élément 35 mesuré en blé. Son bénéfice est

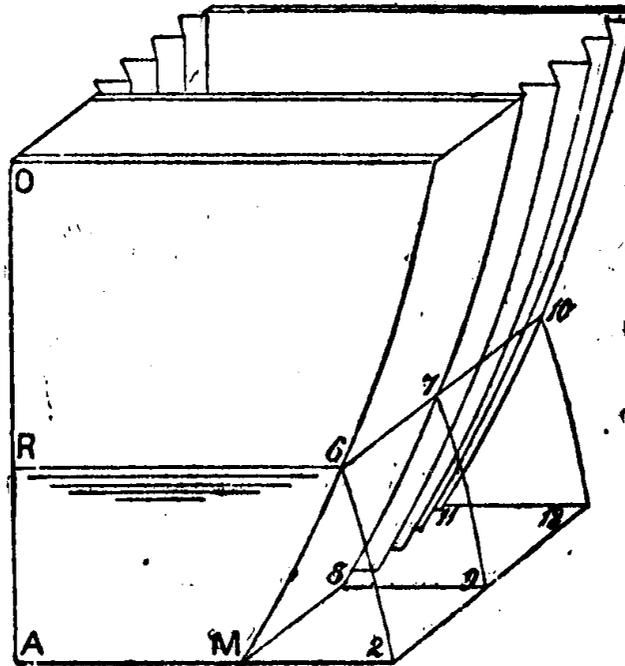


Fig. 40.

maximum quand il achète une quantité telle que l'utilité marginale de cette quantité soit égale à son prix.

La figure 39 s'applique à la « rente » ou « bénéfice du producteur », en remplaçant « vente » par « achat » ; « vendre » par « acheter ».

Pour avoir l'expression du bénéfice en monnaie, il faut multiplier l'aire M26 par le prix. Sur chaque citerne construisons la courbe 62 (fig. 38), et considérons un déplacement d'avant en arrière de une unité (soit un pouce) de l'aire RA26, de telle sorte

qu'elle engendre un volume (*fig. 40*) adjacent à la citerne antérieure et ensuite un déplacement de  $p$  pouces dans le prolongement du premier, de telle sorte qu'elle engendre un volume adjacent à la citerne postérieure.

Le volume antérieur redonne l'utilité totale mesurée en bien. Le volume postérieur donne l'utilité totale *mesurée en monnaie*. En d'autres termes, le contenu de la citerne postérieure et son volume adjacent représentent la quantité de monnaie dont le paiement par l'individu ne lui laisserait ni bénéfice ni perte, pourvu que son évaluation marginale de celle-ci ne soit pas modifiée par l'opération. La part de la citerne représente la monnaie qu'il verse en réalité, et le volume extérieur 7, 10, 12, 9, 8, 11 représente son « bénéfice ». De même pour le producteur.

### III. — MAXIMUM DE BÉNÉFICE

#### § 1

Dans le cas d'un seul individu répartissant un revenu déterminé en divers biens à des prix déterminés, la répartition réalisée et exposée dans la Partie I conduit au maximum d'utilité totale, car, étant donné que (ch. IV, § 2) :

$$\frac{dU}{dA_1} = \frac{dU}{dm_1} \cdot p_a; \quad \frac{dU}{dB_1} = \frac{dU}{dm_1} \cdot p_b; \dots$$

on a :

$$\frac{\frac{dU}{dA_1}}{p_a} = \frac{\frac{dU}{dB_1}}{p_b} = \dots = \frac{\frac{dU}{dM_1}}{p_m}. \quad (1)$$

Les numérateurs sont les utilités marginales par unité de bien. Les diviser par les prix, c'est prendre comme unité de bien le dollar. Chaque fraction représente ainsi l'utilité marginale par

dollar. L'équation exprime le fait que le taux d'accroissement de l'utilité résultant d'une plus grande affectation de monnaie à l'acquisition d'un bien quelconque est le même pour tous les biens. Dès lors, en vertu d'un théorème d'analyse bien connu, l'utilité totale doit avoir la valeur maximum à laquelle puisse conduire une répartition d'un revenu déterminé. De même l'individu répartit sa production de manière que pour tout dollar de bien produit la désutilité marginale soit la même, de telle sorte que la désutilité totale est pour lui minimum. Par suite, la différence entre l'utilité totale qu'il recueille et la désutilité totale qu'il subit, ou son bénéfice économique, est maximum.

## § 2

Dans la répartition d'un seul bien entre plusieurs individus, étant donné que :

$$\frac{dU}{dA_1} = \frac{dU}{dm_1} \cdot p_a; \quad \frac{dU}{dA_2} = \frac{dU}{dm_2} \cdot p_a; \quad \dots; \quad \frac{dU}{dA_n} = \frac{dU}{dm_n} \cdot p_a,$$

on a :

$$\frac{\frac{dU}{dA_1}}{\frac{dU}{dm_1}} = \frac{\frac{dU}{dA_2}}{\frac{dU}{dm_2}} = \dots = \frac{\frac{dU}{dA_n}}{\frac{dU}{dm_n}}, \quad (2)$$

c'est-à-dire que les utilités marginales (quand l'unité d'utilité est pour chaque individu l'utilité marginale de la monnaie) sont égales et que l'utilité totale est maximum. De même la désutilité totale est minimum et, par suite, le bénéfice est maximum.

## § 3

La première équation continue peut être divisée par  $\frac{dU}{dm_1}$  et la seconde par  $p_a$ , et les premiers membres devenant identiques, nous avons une équation continue commune :

$$\frac{\frac{dU}{dA_1}}{\frac{dU}{dm_1} \cdot p_a} = \frac{\frac{dU}{dB_1}}{\frac{dU}{dm_1} \cdot p_b} = \dots = \frac{\frac{dU}{dA_2}}{\frac{dU}{dm_2} \cdot p_a} = \text{etc.} \quad (3)$$

c'est-à-dire que les utilités marginales de tous les biens pour tous les consommateurs sont égales quand l'unité d'utilité est l'utilité marginale de la monnaie et l'unité de bien le dollar. Dès lors l'utilité totale pour l'ensemble du marché ainsi mesurée est maximum (1).

#### § 4

On peut toutefois objecter à juste titre que l'utilité marginale de la monnaie pour une personne n'est pas assimilable à l'utilité marginale de la monnaie pour une autre, c'est-à-dire qu'il est inadmissible d'employer comme unité d'utilité pour l'homme pauvre la haute utilité marginale de son petit revenu et d'ajouter le petit nombre de si grandes unités dont se compose le bénéfice de l'homme pauvre au bénéfice correspondant de l'homme riche, dont l'unité de mesure est petite et le nombre d'unités dont il se compose considérable.

Si nous supposons que quelque mystérieuse science permette d'établir une équivalence entre les utilités recueillies par des individus différents (Voir Partie II, chapitre IV, § 2), et que par quelque mystérieux stratagème de socialisme nous puissions, sans changer les quantités totales des biens, modifier la répartition de manière à rendre maximum l'utilité pour l'ensemble du marché, notre condition deviendrait

$$\frac{dU}{dA_1} = \frac{dU}{dA_2} = \text{etc.} \quad (4)$$

On pourrait satisfaire à cette condition en modifiant les montants relatifs des revenus en prenant au riche et en donnant au pauvre jusqu'à ce que

$$\frac{dU}{dm_1} = \frac{dU}{dm_2} = \text{etc.}$$

(1) Cf. AUSPITZ et LIEBEN, p. 23 et 435.

ce qui porté dans l'équation (2) conduira évidemment à la relation requise (4), ou en rejetant la condition de l'uniformité de prix et en faisant à chaque homme un prix inversement proportionnel à l'utilité marginale de la monnaie pour lui, ce qui porté dans (3) fournira évidemment (4).

Pour interpréter l'équation (4) avec le mécanisme, nous pouvons agir sur la position des tampons de la figure 8 jusqu'à ce que dans chaque file les ordonnées soient égales. (Cela ne se produirait ni si « les revenus étaient également répartis », ni si « les bénéfices » étaient égaux, car les personnes différent de puissance de jouissance, et il n'en resterait pas moins vrai que celles dont la capacité de plaisir serait grande devraient consommer la plus grande quantité pour rendre maximum le bénéfice total sur l'ensemble du marché.) Ou bien nous pouvons supprimer tous les leviers et réarranger les épaisseurs des compartiments postérieurs de manière à rendre égales les ordonnées de chaque file.

De même, la désutilité minimum serait réalisée si toutes les désutilités marginales étaient égales. On aurait alors un bénéfice maximum. Ce bénéfice maximum est celui qui est réalisable quand les quantités de chaque bien consommées et produites sont fixées et données. Si nous avons la faculté de réarranger également ces quantités, nous obtiendrions le bénéfice maximum quand les utilités marginales seraient égales aux désutilités marginales ; i.e. quand on aurait :

$$\frac{dU}{dA_{1,\pi}} = \frac{dU}{dA_{1,\kappa}} = \frac{dU}{dA_{2,\pi}} = \text{etc.}$$

Sous un tel régime socialiste on consommerait et produirait plus de « biens de nécessité » et moins de « biens de luxe » que précédemment. Le « riche » ou puissant produirait plus et consommerait moins que précédemment ; le « pauvre » ou faible consommerait plus et produirait moins. Pour chacun les utilités marginales et les désutilités marginales seraient cependant égales.

Ces considérations, il est inutile de le dire, ne visent pas à la

justification du socialisme, mais elles servent à jeter la lumière sur une question parfois débattue entre économistes mathématiciens et à concilier l'assertion (1) de Launhardt que l'utilité n'est pas maximum, avec celle d'Auspitz et Lieben qu'elle l'est. La première est, inconsciemment, rattachée à l'équation (4), qui n'est pas exacte, la dernière à l'équation (3), qui l'est (2).

#### IV. — ELIMINATION DE VARIABLES

Les quatre groupes d'équations, Partie I, chapitre IV, § 10, peuvent être réduits. Nous pouvons substituer à  $\frac{dU}{dA_1}$  sa valeur  $F(A_1)$  et éliminer ainsi toutes les utilités marginales. De plus, nous avons la faculté de nous procurer des expressions de  $p_a, p_b, \text{etc.}$ , en fonction des biens. Tout d'abord, si  $m = n$  le second groupe d'équations peut aisément être résolu par des déterminants (3) donnant (4) :

$$p_a = \left\{ \begin{array}{cccc} K_1 & B_1 & \dots & M_1 \\ K_2 & B_2 & \dots & M_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_n & B_n & \dots & M_n \end{array} \right\} \div \left\{ \begin{array}{cccc} A_1 & B_1 & \dots & M_1 \\ A_2 & B_2 & \dots & M_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & B_n & \dots & M_n \end{array} \right\}$$

(1) *Volkswirtschaftslehre* sous le titre « Wiederholte Tausch » (échange répété).

(2) AUSPITZ et LIEBEN semblent ne pas remarquer cette différence de point de vue. Préface, p. xxv.

(3) BURNSIDE et PANTON, *Theory of Equations*, p. 251.

(4) Cette équation ne signifie pas que l'on peut donner à  $A_1, B_1, \text{etc.}$  n'importe quelles valeurs arbitraires et que le prix qui en résulte pour A est fourni par cette simple expression ; mais seulement que si  $A_1, B_1, \text{etc.}$  satisfont à toutes les conditions du ch. IV, § 10, le prix pourra être mis sous la forme du quotient de ces deux déterminants.

dans lesquels visiblement une modification de A exercera en général une plus grande influence sur  $p_a$  qu'une modification égale de B, etc. Il est clair cependant que  $p_a$  n'est pas une fonction de A seulement.

Pratiquement  $n > m$ . Nous pouvons donc utiliser les  $m$  premières équations du second groupe, ou, par le fait,  $m$  équations quelconques. Les quotients des déterminants résultants doivent être égaux entre eux ainsi qu'aux divers quotients analogues relatifs à la production.

On peut calculer les valeurs correspondantes de  $p_b$ ,  $p_c$ , etc., et les substituer dans le quatrième groupe.

Or si partout où  $A_1$  figure dans le quatrième groupe, nous le remplaçons par  $K_a - A_2 - A_3 - \dots - A_n$  tirés du premier groupe, de même pour  $B_1$ , etc., le quatrième groupe que l'on obtient se suffit à lui-même. Nous avons ainsi éliminé les variables  $\frac{dU}{dA}$ , etc.,  $p_a$ , etc.,  $A_1$ ,  $B_1$ , etc., et nous nous sommes débarrassé du premier, du second et du troisième groupes d'équations. Nous ne pouvons, toutefois, pas aller plus loin tant que les formes explicites des fonctions  $F(A_1)$ , etc. ne sont pas données.

## APPENDICE II

### CAUSES RESTRICTIVES DE L'ANALYSE PRÉCÉDENTE

#### §. 1

Nous n'avons aucune prétention à ce que l'analyse précédente soit parfaite ou épuise la question. Il n'existe pas de telle analyse d'un phénomène quel qu'il soit, même en physique. Les hypothèses du ch. II, § 2 de la Partie I sont bien entendu des hypothèses idéales. Elles ne s'appliquent qu'imparfaitement à New-York City ou à Chicago. Les hypothèses idéales sont inévitables en toute science. L'apparition d'une distinction entre l'idéal et le réel est en fait une preuve de progrès (1). Même en hydrostatique l'hypothèse de la fluidité parfaite n'est jamais entièrement réalisée. Le physicien n'a jamais expliqué *entièrement* un seul phénomène de l'univers. Il ne procède que par approximations. L'économiste ne peut espérer faire mieux. Certains auteurs, ceux de l'école historique en particulier, sont disposés à trouver à redire à l'introduction d'une *analyse mathématique raffinée*. C'est la vieille affaire de l'homme « pratique » contre le savant. Rien n'empêche le capitaine au long cours de conduire son navire tout en se riant du professeur d'université et de sa minutieuse exposition de la manière de procéder. Que lui importe toute cette

(1) Voir Prof. Simon NEWCOMB, *The Method and Province of Pol. Econ.*, *N. Am. Rev.*, CCXI, IX.

résolution de forces et de vitesses qui ne tient aucun compte de la variation des coups de vent, de la dérive de la carène, du tangage et du ballonnement, que lui importe les hypothèses qui font de la voilure un plan idéal et négligent les effets du vent sur la coque ? Il n'est pas nécessaire de tirer la morale. Jusqu'à ce que l'économiste se soit accoutumé à une analyse idéale raffinée, il ne peut prétendre être scientifique. Après avoir fait une analyse statique idéale, le savant peut aller plus loin et réintroduire peu à peu les considérations laissées tout d'abord de côté. Il ne s'agit pas de cela quant à présent. Mais il peut être bon d'énoncer simplement les plus importantes de ces causes restrictives.

## § 2

Dans la Partie I nous avons considéré l'utilité de A comme étant une fonction de la quantité de A seulement, et dans la Partie II comme étant une fonction de tous les biens consommés par un individu donné. Nous pourrions aller plus loin et la regarder comme une fonction de tous les biens produits et consommés, en envisageant non la production *nette* de chaque article, mais en faisant entrer en ligne de compte séparément les quantités effectivement produites et les quantités effectivement consommées par l'individu donné.

Nous pourrions en outre la regarder comme une fonction des quantités de chaque bien produites ou consommées par *toutes les personnes* figurant sur le marché. Ce point de vue est important dès que l'on considère un homme dans ses rapports avec les membres de sa famille ou que l'on considère des articles de mode comme des diamants (1), ainsi que lorsque l'on se préoccupe de cette interdépendance (jamais entièrement étudiée), la division du travail.

Cette cause restrictive a de nombreux analogues en physique.

(1) Voir David WELLS, *Recent Economic Changes, on Diamonds*.

L'attraction de gravité est une fonction de la distance du centre de la terre. Une analyse plus rigoureuse en fait une fonction de la révolution de la terre, de la position et de la masse de la lune (théorie des marées) et finalement de la position et de la masse de tous les corps célestes.

### § 3

Les articles ne sont pas toujours homogènes ou divisibles à l'infini. Introduire cette cause restrictive, c'est remplacer chaque équation relative à des utilités marginales par deux inégalités et faire entrer en ligne de compte un équilibre *indéterminé* entre certaines limites (1). Comme cas limite nous pouvons imaginer un article comme un livre dont nul ne désire plus d'un exemplaire. L'utilité de la Pol. Econ. de Mill (par exemple) est considérablement plus grande que son prix, mais l'utilité d'un second exemplaire est considérablement moindre que son prix. Pour l'ensemble du marché il y aura néanmoins une *personne marginale* pour laquelle l'utilité est très voisine du prix. Un changement de prix ne modifiera pas la quantité achetée par chacun, mais elle modifiera le *nombre* des acheteurs (2).

### § 4

La production, la consommation et l'échange sont intermittents. La théorie de l'utilité, lorsqu'elle est appliquée à un *acte isolé* de production ou de consommation ou bien de vente ou d'achat, est indépendante du temps, ou, plutôt, elle ne dépend de l'élément temps que par la forme de la fonction d'utilité (3). Mais l'étude d'un certain nombre de ces actes doit tenir compte de leur fré-

(1) AUSPITZ et LIEBEN, 117-136 et 467.

(2) L'étude de H. CUNYNGHAME dans *l'Ec. Jour.*, mars 1892, s'applique à ce cas.

(3) Cf. JEVONS, 63-68.

quence. La manière dont intervient l'élément temps a embarrassé nombre d'économistes.

Il n'est peut-être pas déplacé d'emprunter un exemple à la physique. Dans la théorie cinétique des gaz, la pression exercée contre les parois du récipient contenant le gaz est expliquée par le continuuel bombardement de cette paroi par des molécules. Mais alors se présente une difficulté apparente. Un rebondissement d'une molécule implique simplement une idée de *moment* alors que ce que nous désirons expliquer est une *pression* ou une *force*, ce qui n'est en aucune mesure un moment, mais un moment divisé par un *temps*. Comment faire intervenir un temps ? En prenant en considération non plus une, mais plusieurs molécules et en tenant compte de la *fréquence* de leurs collisions. Le moment moyen de chaque choc divisé par l'intervalle moyen séparant les chocs est la pression cherchée.

De même, un échange de produits est un canal réunissant la production et la consommation. Au lieu d'un courant uniforme d'un boisseau par seconde, la machinerie de l'échange a pour effet d'en précipiter un millier de boisseaux d'un seul coup de batte pour ainsi dire. Le temps n'a pas à intervenir pour expliquer un coup isolé, mais il est nécessaire pour en expliquer plusieurs.

### § 5

L'état statique idéal imaginé dans notre étude ne se réalise jamais en fait.

Aucun bien n'a un taux annuel de production et de consommation constant. Les procédés industriels ne restent pas stationnaires. Les goûts et les modes changent. Les paniques témoignent de l'absence d'équilibre. Leur explication fait partie de la dynamique de l'économique. Mais nous trouvons encore l'analogie de cela en physique. L'eau tend à se mettre de niveau, mais cette loi n'explique pas entièrement le Niagara. Un grand nombre de données particulières sont ici nécessaires, et le physicien est aussi inapte à conseiller le capitaine de la *Maid of the Mist* que l'écono-

miste à diriger un spéculateur de Wall street. L'absence de séparation entre la statique et la dynamique semble fournir une explication historique (1) de la grande confusion des anciennes conceptions physiques. Pour établir cette séparation il fallait passer par la déplaisante transition placée entre le monde réel et le monde idéal. Le monde réel tant physique qu'économique n'a pas de position d'équilibre. Le prix « normal » (2), la production et la consommation sont suffisamment complexes sans les complications de changements de structure sociale. Certains économistes rejettent la notion de « normal » comme correspondant à un état idéal mais irréalisable. Ils seraient tout aussi fondés à rejeter l'équilibre idéal et irréalisable de la mer.

Le côté dynamique de l'économie n'a pas encore fait l'objet d'une étude systématique. S'il en avait fait l'objet, cela permettrait de concilier nombre de contradictions apparentes, telles que celle-ci : Quand un marché n'est pas en équilibre, des choses peuvent se vendre « plus qu'elles ne valent », comme le sait tout homme d'affaires, c'est-à-dire que les rapports convenables des utilités marginales et des prix ne se maintiennent pas.

### § 6

Nous avons supposé une population constante. Or la population change et avec elle changent aussi toutes les fonctions d'utilité. Une étude dont une des variables indépendantes est la population (3) conduit à un autre chapitre de l'économie. Dans les précédentes recherches, l'influence de la population fut incorporée dans la forme de la fonction d'utilité. Il en fut de même également de tous les facteurs physiques, moraux et sociaux ne dépendant pas des quantités de produits ou de services.

(1) WHEWELL, *Hist. Induc. Sci.*, I, 72-3 et 186.

(2) MARSHALL, p. 84.

(3) Voir l'article du Prof. J.-B. CLARK, *Distribution as determined by a law of rent. Quart. Jour. Econ.*, avr. 1891, p. 289.

## § 7

Les individus ne sont pas libres de suspendre en tout point leur consommation ou leur production. Les ouvriers d'une fabrique doivent avoir un nombre d'heures de travail uniforme. L'indésirabilité marginale de la dernière heure peut, pour certains ouvriers, être égale, pour d'autres, supérieure ou inférieure à l'utilité de leur salaire.

## § 8

Nul n'a pleine connaissance de tous les prix et n'est à même de leur adapter ses actes avec la précision admise ; ces deux observations sont des points de départ d'une étude distincte.

## § 9

La « symétrie fondamentale de l'offre et de la demande » mise en relief par Auspitz et Lieben ne devrait pas nous masquer la fondamentale *asymétrie*. La symétrie nous met à même de faire des recherches sur la dépendance générale de la consommation et de la production, mais pour des recherches sur des questions spéciales, par exemple sur les tarifs de chemins de fer, il faudrait la laisser de côté.

1° La production d'un bien précède toujours sa consommation.

2° Le maximum de profit dans la *production* correspond à peu de bien pour chaque individu, dans la *consommation* il correspond à beaucoup.

3° Une organisation sociale de plus en plus développée accentue le premier fait, non le second.

4° Il y a plus d'étapes successives dans la production que dans la consommation.

5° L'organisation sociale accentue cette distinction.

6° Il résulte du 4° et du 5° que le *service* plutôt que le *produit* devient de plus en plus l'unité dans la production.

7° On est plus libre de suspendre en tout point sa consommation que sa production.

8° L'organisation sociale accentue ce fait.

9° L'entente et le monopolisme sont plus praticables et plus fréquents dans la production que dans la consommation.

10° Dans la production la distinction entre les frais fixes et les dépenses courantes joue souvent un rôle important. Cela mérite d'être examiné à part. Les frais de transport sur un bateau à vapeur ne sont pas représentés par ce que coûte le transport d'une tonne supplémentaire, mais par cette quantité augmentée de la part proportionnelle de cette tonne dans les frais fixes (intérêt, assurance, etc.). En d'autres termes, le coût marginal d'un service dépend de la marge du capital engagé aussi bien que du coût marginal de la course du navire (qui est purement nominal). Il en est de même dans la théorie des tarifs de chemins de fer, mais le créateur de chemins de fer ne peut prévoir aussi bien les résultats de son entreprise, et son chemin de fer une fois construit il ne peut en changer la route comme cela est possible pour le bateau à vapeur. L'application de la théorie aux chemins de fer implique que ceux qui font des projets de chemins de fer sachent ce que sera le trafic. En conséquence, l'étude telle qu'elle doit être faite de tarifs de chemins de fer, *en supposant que les chemins de fer sont déjà construits*, ne tient pas compte des frais fixes, mais est établie d'après « ce que supportera le trafic (1) ».

Une théorie complète des rapports du coût de production au prix, dans ses diverses ramifications spéciales, est un sujet trop vaste pour être traité ici.

### § 10

Nous avons supposé dans toutes ces recherches que l'utilité marginale décroît quand la quantité de produit croît. Cela n'est

(1) Voir HADLEY, *Railroad Transportation*.

pas uniformément vrai ; il est visible, par exemple, que cela n'est pas vrai des liqueurs intoxicantes. Une étude du commerce des liqueurs devrait être traitée quelque peu différemment de celle du commerce de la plupart des autres biens. Il est encore moins uniformément vrai que le coût marginal de production croît quand la quantité produite croît. Il n'est évidemment pas vrai que dans une fabrique de chaussures le coût de production de la seconde chaussure soit plus élevé que le coût de production de la première. Néanmoins il est probable qu'il est très généralement vrai qu'à la marge atteinte en réalité dans les affaires, la désutilité qui correspondrait à l'extension de l'affaire irait en croissant. Quand cela n'est pas vrai et quand il n'est pas vrai que l'utilité marginale décroît quand la quantité de bien croît, il s'établit un état d'instabilité. Le fait de l'instabilité est un des éléments à la base de la tendance actuelle de l'industrie à se tourner vers les trusts et les pools.

### § III

Il n'y a pas de marché isolé. Bien plus, un « marché » même est une chose idéale. Les magasins sur le marché de l'alimentation d'une même cité peuvent être suffisamment écartés pour empêcher l'acheteur de se comporter exactement comme s'il se trouvait devant deux comptoirs à la fois. Les relations entre comptoirs écartés de dix pieds diffèrent de degré plutôt que de nature de celles de Londres avec New-York.

## APPENDICE III

### UTILITÉ ET HISTOIRE DE LA MÉTHODE MATHÉMATIQUE EN ÉCONOMIQUE

#### § 1

Les mathématiques présentent un intérêt de même *nature*, bien qu'à des degrés différents, en tout ordre de recherches. Le Prof. B. Peirce (1) dit dans sa fameuse *Linear Associative Algebra* :

« Les mathématiques sont la science qui tire des conclusions nécessaires... Les mathématiques ne sont pas l'inventeur des lois, car elles ne sont pas l'induction, elles ne sont pas non plus le créateur de théories, car elles ne sont pas l'hypothèse, mais elles sont le juge placé au-dessus de l'un et de l'autre...Elles déduisent d'une loi toutes ses conséquences.

« Les mathématiques ainsi définies ont leur rôle en toute recherche morale aussi bien que physique. Même les règles de la logique, à laquelle elles sont étroitement soumises, ne pourraient être établies sans leur aide. Les lois de raisonnement sont susceptibles d'un exposé simple, mais elles doivent être astucieusement transposées avant de pouvoir être adaptées au langage courant et vérifiées par l'observation. Sous sa forme pure et simple le syllogisme ne peut être directement confronté avec l'expé-

(1) *Amer. Jour. Math.*, iv, p. 97.

rience, sans cela il n'y aurait point eu besoin qu'un Aristote l'inventât. Il doit être transformé sous toutes les formes possibles que le raisonnement aime à revêtir lui-même. La transformation c'est l'opération mathématique dans l'établissement de la loi » (1).

Je fais cette citation parce que je crois que beaucoup de personnes, d'économistes particulièrement, ne saisissent pas le caractère des mathématiques en général. Elles s'imaginent qu'un physicien peut s'asseoir dans son cabinet et avec l'analyse comme talisman dérouler quelque loi physique. Certains économistes ont compté sur une utilisation mystérieuse analogue des mathématiques dans leur propre science.

### § 2

Il nous faut faire avec soin une distinction entre ce qui peut être appelé les *mathématiques* et ce qui peut être appelé la *méthode mathématique*. Les unes ont leur rôle, comme dit le Prof. Peirce, en toute science. En ce sens l'Économique a toujours été mathématique. L'autre se rapporte à l'utilisation *des symboles et des opérations qu'ils représentent*. C'est de cela qu'il y a lieu de s'occuper ici. Un symbole peut être une lettre, un graphique ou un modèle. Tous trois sont utilisés en géométrie et en physique (2).

Par une *opération* sur des symboles on entend une règle dont l'énoncé dépend de la mention de ces symboles (comme l'opération de différenciation). Employer la méthode mathématique, c'est passer de ce qui est donné à ce qui est recherché, à l'aide d'une telle règle. Éviter la méthode mathématique, c'est le faire indé-

(1) Cf. GRASSMANN, *Ausdehnungslehre*, Introduction.

(2) Peu de gens sont au courant de l'importance qu'ont parfois les modèles dans le traitement de ces sciences. Le modèle de Maxwell destiné à représenter les rapports du volume, de l'entropie et de l'énergie en thermodynamique en est un excellent exemple.

pendamment de la règle. Les symboles et les opérations qu'ils représentent viennent en aide à la mémoire et à l'imagination de l'homme.

### § 3

L'utilité de la méthode mathématique est purement relative comme toutes les utilités. Elle apporte une aide considérable à certaines personnes, légère à d'autres, elle est même un obstacle pour certaines.

Avant d'étudier la « mécanique », un écolier est ordinairement versé dans les problèmes arithmétiques de mouvement uniforme. Ce serait un terrible embarras pour lui s'il était obligé d'utiliser la formule  $s = ut$ . L'emploi des symboles n'a pour lui que de la *désutilité*. Mais lorsque en « mécanique » proprement dite, quelques années plus tard, le même écolier étudie la « chute des corps », il trouve commode d'utiliser la formule  $v = gt$ , qui ne diffère de la précédente qu'en ce que l'espace ( $s$ ) est remplacé par l'espace par unité de temps ( $v$ ) et la vitesse ( $u$ ) par la vitesse acquise par unité de temps ( $g$ ). L'augmentation de complexité des grandeurs rend une formule relativement désirable. Néanmoins pour certains la dernière formule n'est d'aucune utilité. L'expérience de l'enseignement de cette question même m'a convaincu que peu nombreux sont ceux qui la comprennent mieux sans l'aide des formules, mais que ce sont précisément les individus qui saisissent le plus vaguement et le plus faiblement les relations qu'elle comporte.

Les formules, graphiques et modèles sont les instruments de hautes études. Le mathématicien exercé les utilise pour éclairer et étendre ses connaissances acquises sans le secours des symboles. Lorsqu'il reprend les mathématiques de son enfance, la mécanique élémentaire lui apparaît lumineuse grâce aux conceptions et aux notations de l'analyse et des quaternions. Voir des fluxions dans la vitesse, l'accélération, la force, ce n'est pas abandonner les anciennes notions mais leur apporter un supplé-

ment, et voir des intégrales dans un moment, l'énergie, le travail, c'est les étendre considérablement. Il sait bien cependant ou du moins il devrait savoir que toutes ces considérations ne peuvent apporter au débutant qu'une entrave à ses progrès et une cause de dégoût. De même le débutant en économie peut également être induit en erreur par la méthode mathématique, alors qu'elle éclaire l'étudiant déjà avancé.

#### § 4

L'utilité d'un traitement mathématique varie donc suivant les caractéristiques de celui qui l'emploie, suivant le degré de son développement mathématique et suivant la complication du sujet abordé. Il y a une haute économie exactement comme il y a une haute physique, qui comportent l'une et l'autre un traitement mathématique. On dit que les mathématiques n'ont apporté aucun nouveau théorème à l'économie. Cela est vrai et faux suivant l'élasticité de nos termes. On peut répondre au défi de Cairnes par un contre-défi de montrer chez un auteur non-mathématique ce que l'on trouve dans Cournot, Walras ou Auspitz et Lieben.

Si je puis risquer une réflexion, ceux qui froncent le sourcil à l'économiste mathématicien parce qu'il « enveloppe dans des symboles ses mystérieuses conclusions » me semblent dans certains cas montrer au doigt ces « conclusions » qu'ils reconnaissent comme de vieilles connaissances quand elles « ne sont pas enveloppées » de symboles et contre le défaut de nouveauté desquelles ils protestent vigoureusement ; et en même temps ils semblent ignorer complètement ces « mystérieuses » conclusions qui sont nouvelles, parce qu'ils croient que les anciens théorèmes ayant cours épuisent tout ce qu'il a d'important sur le sujet. Pourquoi le mathématicien serait-il obligé de justifier la mise en œuvre de sa science en bouleversant l'économie ou en établissant certaines « lois » plus fondamentales que celles déjà admises.

La physique élémentaire est la physique fondamentale, et elle peut être enseignée avec peu ou pas de symboles mathématiques. La physique supérieure est relativement moins populaire en même temps que plus mathématique. Le compte effectué, la *Physique élémentaire* de Ganot, de 986 pages, contient une formule par trois pages un tiers. Le chapitre sur l'électricité et le magnétisme, de 320 pages, contient une formule par 4 pages  $\frac{1}{2}$ , tandis que le profond traité de Mascart et Joubert sur l'Electricité et le Magnétisme, vol. I, de 640 pages, contient 3 formules  $\frac{3}{4}$  par page ou 15 fois autant par page que le même sujet dans Ganot.

De même en économie le traitement mathématique se montre relativement utile dans la mesure où les relations deviennent relativement compliquées. L'introduction de la méthode mathématique marque une étape de progrès — peut-être n'est-il pas trop extravagant de dire, l'entrée de l'économie dans une ère scientifique.

### § 5

La méthode mathématique s'est-elle solidement implantée ? Avant Jevons toutes les nombreuses tentatives de traitement mathématique tombèrent à plat. Tous leurs auteurs subirent l'oubli le plus complet jusqu'au jour où Jevons déterra leurs ouvrages dans sa bibliographie. Une des principales raisons en est que ces auteurs se firent une conception fautive de l'application des mathématiques. Ce fut le cas, à mon avis, même du distingué Whewell. Jevons estime que ce fut aussi le cas de Canard, bien que son travail ait été couronné par l'Institut de France. La seconde raison de cet oubli c'est que le monde manquait de préparation. Le mouvement avançait son temps et était prématuré. Aujourd'hui, Cournot certainement, Gossen peut-être exercent une influence considérable sur la pensée économique. Marshall, dont

l'ouvrage récent est considéré comme étant à l'économique moderne ce que fut celui de Mill à l'économique d'il y a une génération, exprime à maintes reprises son admiration et sa reconnaissance pour Cournot.

Ainsi la méthode mathématique s'établit en fait avec Jevons en 1871. Après cette époque l'économie politique a été le domaine favori de ceux dont les goûts étaient semi-scientifiques et semi-littéraires ou historiques. Mais les tendances scientifiques et les tendances littéraires s'équilibrent rarement, et, comme on pouvait s'y attendre, une fois qu'elles eurent commencé à se partager, elles se différencièrent nettement. A une extrémité est l'école historique de Roscher et de Leslie, à l'autre est l'école mathématique, déductive, ou, comme l'on dit, autrichienne, de Jevons, Menger et Walras, cependant que les économistes « orthodoxes », les successeurs légitimes d'Adam Smith, de Ricardo et de Mill, constituent le corps central dont l'une et l'autre se sont détachées. Ce clivage correspond toutefois, dans une large mesure, à une division du champ des recherches plutôt qu'à des méthodes ou à des théories opposées dans le même champ.

L'économie mathématique a, semble-t-il, ses plus chauds partisans en Autriche, en Italie et au Danemark. La France occupe la place suivante cependant que l'Angleterre, l'Amérique et l'Allemagne ont leurs enthousiastes isolés, mais restent très attachées aux traditions classiques. Le Prof. Pantaleoni estime que « le mouvement le plus actif dans l'économie politique italienne est celui de la nouvelle école assez inexactement nommée l'autrichienne », tandis que Graziani dit que la théorie utilitaire de la valeur « semble clore le cycle d'évolution de la pensée italienne » (1).

En Angleterre le Prof. Edgeworth, connu pour son enthousiasme pour l'économie mathématique, a été récemment nommé titulaire de la chaire d'économie politique à Oxford, en même

(1) Article sur *Economics in Italy*, par le Prof. UGO RAUBENO, *Pol. Sci. Quart.*, sept. 1891, pp. 439-473.

temps que le Prof. Marshall poursuit le même mouvement à Cambridge.

Il s'est produit un grand développement de la littérature mathématico-économique depuis 1871. Deux décades exactement se sont écoulées depuis l'apparition du livre faisant époque de Jevons. Les publications mathématico-économiques (1) figurant ici dans mes indications bibliographiques qui apparurent dans cette période furent pendant la première décade au nombre de 30, dues à 12 auteurs, tandis que pendant la seconde elles furent de 66, dues à 23 auteurs. De toute évidence on voit que la méthode mathématique est arrivée à prendre pied.

### § 6

Nous pouvons nous rendre compte pourquoi il en est ainsi en jetant les yeux sur l'œuvre que la méthode mathématique a déjà réalisée. Il convient peut-être de créditer la méthode mathématique de la notion d'utilité marginale. Cette notion a cinq origines indépendantes avec Dupuit, Gossen, Jevons, Menger et Walras. Tous, sauf Menger, présentèrent cette notion et vraisemblablement l'obtinrent par des procédés mathématiques. Aucune idée ne s'est montrée plus féconde dans l'histoire de la science. Cette acquisition à elle seule est une justification suffisante de la méthode mathématique.

Passer en revue tout ce qui a été obtenu en développant et en appliquant la notion d'utilité marginale (et la plupart de ces développements ont été purement mathématiques), ce serait impossible ici, de même que d'exposer toutes les autres conceptions qui sont nées de l'emploi des mathématiques. Cet emploi a redressé nombre d'erreurs et de confusions d'idées. Cette fonction

(1) Je n'ai pas même compris ici Menger, Böhm-Bawerk et autres auteurs de l'école autrichienne, qui, par antipathie pour la note mathématique, ont laissé de côté l'emploi des symboles mathématiques.

correctrice a été vraiment la principale mission des mathématiques dans le domaine de la physique, quoique peu de ceux qui ne sont pas des physiciens eux-mêmes soient au courant de ce fait.

En réalité, les notions d'utilité et de désutilité marginales peuvent être regardées comme des corrections des deux anciennes théories apparemment incompatibles de la valeur — la théorie de l'utilité et la théorie du coût de production. L'utilité était primitivement considérée comme proportionnelle au bien. (Le fait que cela ne fut jamais supposé *explicitement* montre d'une façon éclatante comment, en l'absence d'une soigneuse étude mathématique dans laquelle chaque grandeur a une signification définie, des suppositions tacites se glissent dans l'esprit et y jettent la confusion.) On fit ensuite ressortir que l'utilité ne pouvait justifier le prix puisque l'eau était utile. De la sorte l'« utilité » et la « rareté » eurent conjointement le privilège de déterminer le prix. Ce fut le clair exposé mathématique de Jevons sur l'utilité qui montra le peu de profondeur de l'ancienne analyse, et mit en lumière la supposition tacite absurde, inattaquée parce que inaperçue, que chaque verre d'eau aurait une utilité intrinsèque indépendante du nombre de verres déjà bus.

Jevons insista sur la *demande*. Nombre de ceux qui approuvèrent son ouvrage continuèrent à commettre des erreurs analogues au sujet de l'offre. Ricardo (1) avait indiqué la notion du coût marginal. Mais Mill même n'aperçut pas son extension au delà de la production agricole. Auspitz et Lieben ont un mérite considérable d'en avoir dégagé les conséquences et d'avoir montré par un bel exposé mathématique que la théorie de l'utilité marginale et la théorie du coût marginal ne sont pas contradictoires, mais supplémentaires. En fait la « marge » elle-même est déterminée par la condition que l'utilité et le coût des éléments finaux soient égaux (quand ils sont mesurés en monnaie).

La méthode mathématique doit être créditée du développement

(1) *Pol. Econ.*, ch. 2.

des notions de rente ou de bénéfice des consommateurs et des producteurs appliquées si ingénieusement par Auspitz et Lieben, et si remarquablement par le Prof. J.-B. Clark dans son article original sur la loi des trois rentes (1). La relation intime et nécessairement mathématique entre l'égalité des utilités et des désutilités marginales et le maximum de la rente totale des consommateurs et des producteurs, théorème sur lequel ont insisté Auspitz et Lieben ainsi que Edgeworth, est, cela va de soi, une conquête de l'instrument mathématique.

On doit à la méthode mathématique une nouvelle série de classifications basées sur les propriétés mathématiques. Ainsi la classification due à Auspitz et Lieben de tous les biens en trois groupes (2), est, je crois, une nouveauté suggérée et aussitôt mise au point par l'emploi de leurs graphiques. La classification du capital en capital libre et en capital engagé (*sunk*) est une subdivision sur laquelle ont insisté les auteurs mathématiciens, comme Marshall, et qui se montre féconde (3).

Ainsi je crois que la méthode mathématique a apporté de nombreuses contributions effectives à l'économie et qu'elle est destinée à lui en apporter encore plus. Pour justifier cette assertion, je renverrais le lecteur aux livres mentionnés dans la bibliographie parmi les auteurs récents, en particulier Walras, Auspitz et Lieben, Marshall, Edgeworth, Wicksteed et Cunyngame, et aussi, s'il convient d'englober les auteurs qui tout en évitant le langage mathématique ont interprété et développé les mêmes idées, Menger, Wieser, Böhm-Bawerk, Clark et Hobson.

### § 7

Il est peut-être bon de présenter une série de citations empruntées à ceux qui ont suivi ou admiré la voie mathématique.

(1) *Quart. Jour. Econ.*, avril 1891.

(2) Page 46.

(3) Voir CUNYNGAME, *Geom. method of treating exchange value, monopoly, and rent. Econ. Jour.*, mars 1892, p. 35.

*Whewell* (1) dit : [La méthode mathématique en mécanique préserve les savants de trois espèces d'erreurs à savoir :] « They might have assumed their principles wrongly, they might have reasoned falsely from them in consequence of the complexity of the problem, or they might have neglected the disturbing causes which interfered with the effect of the principal forces... It appears, I think, that the sciences of mechanics and political economy are so far analogous that something of the same advantage may be looked for from the application of mathematics in the case of political economy. » (Ils auraient pu mal poser leurs principes, ils auraient pu raisonner à faux sur ces principes du fait de la complexité du problème, ou bien ils auraient pu négliger les causes perturbatrices intervenant dans les effets des forces principales... Il est manifeste, je pense, que la science de la mécanique et celle de l'économie politique sont tellement analogues que l'on peut attendre dans une certaine mesure le même profit de l'application des mathématiques dans le cas de l'économie politique.) En outre (2) : « This mode of treatment might be expected to show more clearly than any other within what limits and under what conditions propositions in political economy are true. » (On pourrait espérer que ce mode de traitement montre plus clairement que tout autre entre quelles limites et sous quelles conditions des propositions en économie politique sont vraies.)

*Cournot* (3) : « L'emploi des signes mathématiques est chose naturelle toutes les fois qu'il s'agit de discuter des relations entre des grandeurs ; et lors même qu'ils ne seraient pas rigoureusement nécessaires, s'ils peuvent faciliter l'exposition, la rendre plus concise, mettre sur la voie de développements plus étendus, prévenir les écarts d'une vague argumentation, il serait peu philoso-

(1) *Cambridge Philosophical Transactions*, 1830, p. 194.

(2) *Cambridge Philosophical Transactions*, 1856, p. 1.

(3) *Principes math. de la théorie des richesses*, 1838. Préface, p. VIII.

phique de les rebuter parce qu'ils ne sont pas également familiers à tous les lecteurs et qu'on s'en est quelquefois servi à faux ».

*Gossen* (1) : « Was einem Kopernikus zur Erklärung des Zusammenseins der Welten im Raum zu leisten gelang, das glaube ich für die Erklärung des Zusammenseins der Menschen auf der Erdoberfläche zu leisten... Darum ist es denn eben so unmöglich, die wahre Nationalökonomie ohne Hülfe der Mathematik vorzutragen, wie dieses bei der wahren Astronomie, der wahren Physik, Mechanik u. s. w. » (Ce qu'un Copernic réussit à accomplir pour l'explication de l'existence en commun des mondes dans l'espace, je pense l'accomplir pour l'explication de l'existence en commun des hommes sur la surface de la terre... C'est pourquoi il est dès lors aussi impossible de dégager la véritable économie politique sans le secours des mathématiques que de le faire pour la véritable astronomie, la véritable physique, mécanique, etc.)

*Jevons* (2) : « I have long thought that as it deals throughout with quantities, it must be a mathematical science in matter if not in language. I have endeavored to arrive at accurate quantitative notions concerning utility, value, labor, capital, etc., and I have often been surprised to find how clearly some of the most difficult notions, especially that most puzzling of notions *value*, admits of mathematical analysis and expression. » (J'ai pensé depuis longtemps que puisqu'elle traite, en toutes ses parties, de quantités, elle doit être une science mathématique en fait, sinon par le langage. J'ai cherché à parvenir à des notions quantitatives exactes de l'utilité, de la valeur, du travail, du capital, etc., et j'ai souvent été surpris de voir avec quelle clarté certaines de ces notions les plus difficiles — particulièrement la plus déconcertante de toutes, *la valeur* — admettent l'analyse et la forme mathématique) (3).

(1) *Menschlicher Verkehr*. Préface, p. v.

(2) Préface à la première édition, p. vii.

(3) Trad. Barrault et Alfassa, p. 3.

*Walras* (1) : « Je crois bien que les notations qui y sont employées paraîtront tout d'abord un peu compliquées ; mais je prie le lecteur de ne point se rebuter de cette complication qui est inhérente au sujet et qui en constitue d'ailleurs la seule difficulté mathématique. Le système de ces notations une fois compris, le système des phénomènes économiques est en quelque sorte compris par cela même. »

*Newcomb* (2) : « To ultimately expect from pol. econ. results of such certainty and exactness, that it can present the legislator with numerical predictions like those we have described is by no means hopeless. »... « Mathematical analysis is simply the application to logical deduction of a language more unambiguous, more precise, and for this particular purpose, more powerful than ordinary language. » (Il n'est nullement sans espoir d'attendre finalement de l'économie politique des résultats d'une certitude et d'une exactitude telles qu'il lui soit possible d'offrir au législateur des prédictions numériques comme celles que nous avons décrites. »... « L'analyse mathématique est simplement l'application à la déduction logique d'un langage plus clair, plus précis et, à cette fin particulière, plus puissant que le langage ordinaire. »)

*Launhardt* (3) : « Es ist ja die Mathematik nichts anderes als eine Sprache, welche in strenger Folgerichtigkeit die Beziehungen messbarer Dinge zu einander darstellt, was durch die gewöhnliche Sprache entweder gar nicht oder doch nur in weitschweifiger ungenauer Weise erreicht werden kann. » (La mathématique ce n'est d'ailleurs pas autre chose qu'un langage qui présente en une rigoureuse suite naturelle, les rapports des choses mesurables les unes avec les autres, ce qui avec le

(1) *Econ. pol. pure*, 1874. Préface, p. vi.

(2) *The method and province of pol. econ.* [Compte rendu de la Logical method in pol. econ. de Cairnes] *N. Amer. Rev.*, No. CCXLIX, 1875, p. 259.

(3) *Volkswirtschaftslehre*, Préface, p. v.

langage courant ne peut pas être réalisé du tout ou ne peut l'être que d'une manière diffuse et inexacte.)

*Wicksteed* (1) : « The diagrammatic method of studying economics may be regarded from three points of view : (I) many teachers find in it a stimulating and helpful appeal to the eye and use it as a short and telling way of making statements and registering results. (II) a few students treat it as a potent instrument for giving precision to hypotheses in the first instance and then for rigorously analysing and investigating the results that flow from them. (III) a very few investigators (among whom I think we must rank Jevons), have hoped ultimately to pass beyond the field of pure hypotheses and analysis and to build up constructive results upon empirical curves of economic phenomena established by observation. » (La méthode graphique d'étude de l'économie peut être envisagée à trois points de vue : (I) beaucoup de professeurs y trouvent un moyen d'adresser aux yeux un appel stimulant et profitable et l'utilisent comme procédé rapide et efficace pour faire des exposés et enregistrer des résultats. (II) quelques étudiants en usent comme d'un puissant instrument permettant tout d'abord de donner de la précision aux hypothèses et ensuite d'analyser et d'étudier avec rigueur les résultats qui se dégagent de celles-ci. (III) un très petit nombre de chercheurs (parmi lesquels nous devons, je pense, placer Jevons) ont espéré dépasser finalement le domaine des hypothèses et de l'analyse pures et édifier des résultats constructifs sur des courbes empiriques de phénomènes économiques déduites de l'observation.)

*Foxwell* (2) : [à propos des mathématiques de Jevons et de Marshall] « It has made it impossible for the educated economist to mistake the limits of theory and practice or to repeat the confusion which brought the study into discredit and almost arrested

(1) On certain passages in Jevons' « Theory of pol. econ. » *Quart. Jour. Econ.*, avril 1889, p. 293.

(2) *The Economic Movement in England*, *Quart. Jour. Econ.*, oct. 1888.

its growth. » (Cela a rendu impossible pour l'économiste instruit de se méprendre sur les limites de la théorie et de la pratique ou de retomber dans la confusion qui a discrédité la science et presque arrêté ses progrès.)

*Auspitz et Lieben* (1): « Wir haben uns bei unseren Untersuchungen der analytischen Methode und namentlich der graphischen Darstellung bedient, nicht nur weil sich diese Behandlungsweise überall, wo sie überhaupt anwendbar ist, und namentlich in den naturwissenschaftlichen Fächern glänzend bewährt hat, sondern hauptsächlich auch darum weil sie eine Präzision mit sich bringt, welche alle aus vieldeutigen Wortdefinitionen entspringenden Missverständnisse ausschließt. » (Dans nos recherches nous nous sommes servis de la méthode analytique et particulièrement de figures, non seulement parce que cette façon de procéder a fait ses preuves partout où elle était applicable et particulièrement dans les sciences naturelles, mais encore parce qu'elle comporte une précision qui rend impossibles les malentendus provenant des multiples définitions de mots (2).)

*Edgeworth* (3): ... « the various effects of a tax or other impediment, which most students find it so difficult to trace in Mill's laborious chapters, are visible almost at a glance by the aid of the mathematical instrument. It takes Prof. Sidgwick a good many words to convey by way of a particular instance that it is possible for a nation by a judiciously regulated tariff, to benefit itself at the expense of the foreigner. The truth in its generality is more clearly contemplated by the aid of diagrams... There seems to be a natural affinity between the phenomena of supply and demand, and some of the fundamental conceptions of mathematics, such as the relation between function and variable... and the first principles of the differential calculus, especially in its

(1) *Untersuchungen*. Préface, p. xiii.

(2) Trad. franç., p. xii.

(3) Discours devant la *Brit. Assoc.* comme président de la section de science économique et de statistique. Publié dans *Nature*, 19 sept. 1889, p. 497.

application to the determination of *maxima* and *minima*. » [les divers effets d'une taxe ou d'un autre obstacle, que nombre de travailleurs trouvent si difficiles à suivre dans les laborieux chapitres de Mill, sont saisissables presque d'un coup d'œil avec l'aide de l'appareil mathématique. Le Prof. Sidgwick est obligé de faire appel à bien des mots pour montrer sur un exemple particulier qu'il est possible à une nation de se procurer, grâce à un tarif judicieusement établi, des bénéfices aux dépens des étrangers. La vérité dans toute sa généralité se manifeste plus clairement à l'aide de graphiques... Il semble y avoir une affinité naturelle entre les phénomènes de l'offre et de la demande et certaines des conceptions fondamentales des mathématiques, telles que la relation entre fonction et variable... et les premiers principes du calcul différentiel, en particulier dans son application à la détermination des *maxima* et des *minima*.] [Ce semble] « [to] supply to political economy what Whewell would have called « appropriate and clear » conceptions... Algebra and geometry are to ordinary language in political economy somewhat as quaternions are to ordinary algebraic geometry in mathematical physics. » (offrir à l'économie politique ce que Whewell aurait appelé des conceptions « justes et claires »... L'algèbre et la géométrie sont au langage ordinaire en économie politique quelque chose comme les quaternions à la géométrie analytique ordinaire en physique mathématique.) (Il cite de Maxwell à propos des quaternions : « I am convinced that the introduction of the ideas as distinguished from the operations and methods... will be of great use. ») (Je suis convaincu que l'introduction des idées en tant que distinguées des opérations et des procédés... sera d'une grande utilité.)

En outre (1) : « I do not mean that the mathematical method should form part of the curriculum as we make Greek obligatory for the students of philosophy. But may we not hope that the

(1) *An introductory lecture on pol. econ. delivered before the University of Oxford, oct. 23 d, 1891, publiée dans l'Economic Journal, vol. I, n° 4, p. 629.*

higher path will sometimes be pursued by those candidates who offer *special subjects* for examination. » (Je ne pense pas que la méthode mathématique doive faire partie du programme de même que nous rendons le grec obligatoire pour les étudiants en philosophie. Mais ne pouvons-nous pas souhaiter que la haute voie soit parfois suivie par ces candidats qui présentent des *sujets spéciaux* à l'examen.)

*Marshall* (1): « It is not easy to get a clear full view of continuity in this aspect without the aid either of mathematical symbols or diagrams. ... experience seems to show that they give a firmer grasp of many important principles than can be got without their aid ; and there are many problems of pure theory, which no one who has once learnt to use diagrams will willingly handle in any other way.

The chief use of pure mathematics in economic questions seems to be in helping a person to write down quickly, shortly and exactly, some of his thoughts for his own use : and to make sure that he has enough, and only enough, premises for his conclusions (i. e. that his equations are neither more nor less in number than his unknowns). But when a great many symbols have to be used, they become very laborious to any one but the writer himself. And though Cournot's genius must give a new mental activity to every one who passes through his hands, and mathematicians of calibre similar to his may use their favorite weapons in clearing a way for themselves to the center of some of those difficult problems of economic theory, of which only the outer fringe has yet been touched ; yet it is doubtful whether any one spends his time well in reading lengthy translations of economic doctrines into mathematics, that have not been made by himself. A few specimens of those applications of mathematical language which have proved most useful for my own purpose have, however, been added in an Appendix. » (Il n'est pas facile d'ar-

(1) *Prin. of Econ.* Préface à la première éd., p. xiv ; dans la 2<sup>e</sup> éd.

river à une idée claire et complète de la continuité à ce point de vue sans l'aide des mathématiques ou des diagrammes. ... l'expérience semble montrer qu'ils permettent de saisir plusieurs principes importants mieux qu'on ne le peut faire autrement ; et il y a maints problèmes de théorie pure que nul ayant déjà appris à se servir de graphiques ne traitera sans répugnance de toute autre manière.

La principale utilité des mathématiques pures dans les questions économiques semble être d'aider les gens à noter rapidement, brièvement et exactement leurs pensées pour leur propre usage ; ainsi que de leur donner la certitude qu'ils ont assez et pas trop de prémisses pour leurs conclusions (c'est-à-dire que leurs équations sont en nombre ni plus ni moins grand que leurs inconnues). Mais lorsqu'il faut employer beaucoup de signes, cela devient très pénible pour tout autre que l'auteur lui-même. Le génie de Cournot insuffle une nouvelle activité intellectuelle à tout homme qui entre en contact avec lui, et les mathématiciens de sa force peuvent, en employant leurs armes favorites, se diriger jusqu'au centre de quelques-uns des plus difficiles problèmes de la théorie économique, dont les bords seuls ont été jusqu'ici effleurés ; pourtant on peut se demander si c'est pour un lecteur un bon emploi de son temps que de lire d'interminables transcriptions de théories économiques en calculs mathématiques qui n'ont pas été faits par lui. Quelques-unes des applications du langage mathématique qui m'ont paru les plus utiles pour mon usage personnel ont été néanmoins ajoutées dans un Appendice (1.)

*Cunynghame* (2) : « But curves play in the study of pol. econ. much the same part as the moods and figures play in logic. They do not perhaps assist in original thought, but they afford a system by means of which error can be promptly and certainly detected and demonstrated. And as in logic so in graphic pol. econ.

(1) Trad. franç. T. I p. xi.

(2) Geometrical methods of treating exchange value, monopoly and rent. H. CUNYNGHAME. *Econ. Jour.*, mars 1892, p. 35.

the chief difficulty is not to solve the problem, but to state it in geometrical language. » (Mais les courbes jouent dans l'étude de l'économie politique à peu près le même rôle que celui que jouent les modes et les figures en logique. Elles ne contribuent peut-être pas à la formation de l'idée, mais elles apportent un système au moyen duquel les erreurs peuvent être promptement et irréfutablement découvertes et mises en lumière. Et de même qu'en logique, en écon. pol. graphique la principale difficulté n'est pas de résoudre le problème, mais de le poser dans le langage géométrique).

## § 8

En opposition avec les précédentes se placent les appréciations suivantes de quelques auteurs qui ne peuvent rien apercevoir de bon dans la méthode mathématique.

Un auteur cité par le professeur Edgeworth (1) dit de Jevons dans la *Saturday Review* (11 nov. 1871) : « The equations, ... assuming them to be legitimate, seem to us to be simply useless so long as the functions are obviously indeterminable. » (Les équations, ... en admettant qu'elles soient légitimes, nous semblent être purement et simplement inutiles tant que les fonctions sont visiblement indéterminables.) [Les mathématiques ont pour objet l'étude des *relations* aussi bien que les *calculs*. L'indéterminabilité numérique est courante même en physique mathématique.]

*Cairnes* (2) : « Having weighed Prof. Jevons's argument to the best of my ability, and so far as this is possible for one unversed in mathematics, I still adhere to my original view. So far as I can see, economic truths are not discoverable through the

(1) *Math. Psychics*, p. 119.

(2) *The Character and Logical Method of pol. econ.*, New-York, 1875, Préface. Voir aussi p. 122 ; aussi : *Some leading principles of pol. econ. newly expounded*. Préface.

instrumentality of mathematics. If this view be insound, there is at hand an easy means of refutation — the production of an economic truth, not before known, which has been thus arrived at ; but I am not aware that up to the present any such evidence has been furnished of the efficiency of the mathematical method. In taking this ground, I have no desire to deny that it may be possible to employ geometrical diagrams or mathematical formulæ for the purpose of exhibiting economic doctrines *reached by other paths*, and it may be that there are minds for which this mode of presenting the subject has advantages. What I venture to deny is the doctrine which Prof. Jevons and others have advanced — that economic knowledge can be extended by such means ; that mathematics can be applied to the development of economic truth, as it has been applied to the development of mechanical and physical truth ; and, unless it can be shown either that mental feelings admit of being expressed in precise quantitative forms, or, on the other hand, that economic phenomena do not depend upon mental feelings, I am unable to see how this conclusion can be avoided. » (Après avoir pesé les arguments du professeur Jevons avec les meilleures ressources en notre pouvoir, autant qu'il est permis à quelqu'un qui n'est pas versé dans les mathématiques, nous conservons encore notre première manière de voir. Autant que nous pouvons nous en rendre compte les vérités économiques ne sont pas de celles qui se découvrent avec l'aide des mathématiques. Si cette opinion est fausse, on a sous la main un moyen facile de la réfuter ; c'est de présenter une vérité économique que l'on ne connaissait pas déjà, et à laquelle on soit arrivé par cette voie ; mais jusqu'à présent, on ne semble pas, que nous sachions, avoir fourni cette preuve évidente de l'efficacité de la méthode mathématique. En nous plaçant sur ce terrain, nous n'avons aucunement l'intention de nier la possibilité d'employer les diagrammes géométriques et les formules mathématiques, si l'on se propose de mettre en lumière des doctrines économiques vers lesquelles on aura été conduit par d'autres sentiers ; il peut même se trouver des intelligences pour

qui cette manière d'exposer un tel sujet ait des avantages. Ce que nous nous hasardons à nier, c'est la doctrine que le professeur Jevons et d'autres ont avancée, à savoir que la notion économique est susceptible d'extension par ce procédé, que les mathématiques peuvent être appliquées au développement de la vérité économique, de la même manière qu'elles sont appliquées au développement de la vérité en mécanique et en physique. A moins de démontrer, ou que les phénomènes moraux comme les sentiments comportent d'être exprimés dans des formes quantitatives, ou que les phénomènes économiques ne dépendent pas de la sensibilité, nous sommes dans l'incapacité de voir comment on peut éviter cette conclusion (1).) [Il y a des exemples dans Cournot, Walras, Auspitz et Lieben, etc., qui sont, je pense, de belles manifestations de la « production of an economic truth, not before known. » Il est vrai, toutefois, que chacune de ces vérités aurait pu être découverte sans « la méthode mathématique » par quelque personne d'un raisonnement remarquablement clair. *Mais il en est de même en physique.* Le système de déductions conduisant à chaque vérité physique pourrait être établi sans graphiques ni formules. Un chemin de fer est le meilleur moyen de transport d'un homme de New-York à San-Francisco, bien qu'il soit parfaitement possible d'aller à pied. Cairnes se fait certainement une idée erronée de l'usage de la méthode mathématique dans les recherches physiques. Les mathématiques permettent au physicien d'avoir une vue complète et précise de son sujet, et cet état d'esprit permet et facilite sa découverte. La découverte n'est qu'indirectement due aux mathématiques bien qu'elle n'eut jamais été faite sans elles. Cairnes, semble-t-il, s'imagine qu'en physique la vérité a été découverte en manipulant des équations. L'histoire de la physique ne lui en apportera pas la confirmation. Autant que je sache, il n'y a en physique qu'une seule découverte qui ait été faite dans cette voie — une découverte en lumière. Voir la citation de Peirce au début de cet appendice.]

(1) Trad. franç. par G. Valran, Paris, 1902, p. 2.

*Wagner* (1) : [dans un compte rendu des *Prin. of Econ.*, de Marshall] : « I do not believe that this mode of treating the subject has an independent value of its own for solving our problems. Indeed Marshall himself admits as much. (Je ne crois pas que cette manière de traiter le sujet présente en elle-même une valeur indépendante pour la solution de nos problèmes. Il est vrai que Marshall lui-même en reconnaît autant.) [Le fait-il ? Cf. l'exposé ci-dessus de Marshall.]... « He has used diagrams and formulæ only for purposes of illustration and for greater precision of statement. » (Il n'a employé des graphiques et des formules qu'aux fins d'illustration et pour apporter une plus grande précision dans l'exposé.) [Graphiques et formules ne sont jamais employés à d'autres fins, cependant ils ont certainement une valeur indépendante en physique (par exemple). Cf. §1.]

*Ingram* (2) : « There is not much encouragement to pursue such researches, which will in fact never be anything more than academic playthings, and which involve the very real evil of restoring the metaphysical entities previously discarded. » (Il n'y a guère d'encouragement à poursuivre de telles recherches qui ne seront en réalité jamais rien de plus que des spéculations académiques, et qui offrent le défaut très réel de restaurer les entités métaphysiques précédemment rejetées.) Aussi (3), « Units of animal or moral satisfaction, of utility and the like are as foreign to positive science as a unit of dormative faculty, would be. » (Des unités de satisfaction animale ou morale, d'utilité et les analogues sont aussi étrangères à la science positive que le serait une unité de faculté dormitive). [Voir Partie I, ch. I]. Aussi : (4) « Mathematics can indeed formulate ratios of exchange when they have once been observed ; but it cannot by any process of its own determine those ratios ; for quantitative conclusions imply quantitative premises and these are wanting. There is then no fu-

(1) *Quart. Jour. Ec.*, avril 1891, p. 327.

(2) *Ency. Brit.*, 9<sup>e</sup> éd., vol. XIX, p. 399.

(3) *Ency. Brit.*, 9<sup>e</sup> éd., vol. XIX, p. 386.

(4) *Hist. Pol. Econ.*, New-York, 1888, p. 182.

ture for this kind of study, and it is only waste of intellectual power to pursue it. » (Les mathématiques peuvent, il est vrai, fournir les expressions de rapports d'échange une fois qu'ils ont été observés ; mais elles ne peuvent déterminer ces rapports par un procédé qui leur soit propre ; des conclusions quantitatives impliquent, en effet, des données quantitatives, et celles-ci font défaut. Il n'y a par suite aucun avenir pour ce genre d'étude, et on ne peut que dépenser inutilement sa puissance intellectuelle à le poursuivre.) [Quelle « conclusion » ! Qui demande aux mathématiques de prédire les prix en vue d'être admises en bonne compagnie avec l'École historique ? Aucun économiste mathématicien n'a jamais prétendu faire cela. Le Dr Ingram n'examine pas ce que les mathématiques ont fait ou obtenu, mais déplore bruyamment qu'elles ne soient pas omnipotentes, en en tirant la conclusion qu'elles n'ont aucun avenir.]

*Rabbeno* (1) dit à propos des *Principii di Economia Pura* du Prof. Pantaleoni : « As a monument of abstract logic, it bears fresh witness to the unusual qualities of the author's genius ; but it is based on a method which, frankly speaking, I consider dangerous. In the face of pressing practical problems of every kind, both in production and in distribution, economic thought is drawn off into the field of barren abstractions. Under an attractive semblance of mathematical accuracy these abstractions conceal much that is really false ; for they do not correspond in the least to the complexity of concrete facts. While they distract the student with an imaginary logical construction, they lessen his interest in that positive study which tells us what is, whereas logic by itself gives us only what is thought. Thus in last result they deprive economic science of that great practical importance which it should have in society. » (Comme monument de logique abstraite ils rendent un nouveau témoignage aux extraordinaires qualités de l'esprit de l'auteur ; mais ils reposent sur une

(1) *Economics in Italy*, Prof. Ugo RABBENO, *Pol. Sci. Quart.*, sept. 1891, p. 462.

méthode que, à franc parler, je considère comme dangereuse. En face de problèmes pratiques pressants de tous genres, tout à la fois dans la production et la consommation, la pensée économique se trouve ainsi entraînée dans le champ des abstractions stériles. Sous une attirante apparence d'exactitude mathématique ces abstractions dissimulent nombre de véritables erreurs ; elles ne correspondent en effet pas le moins du monde à la complexité des faits concrets. En détournant l'attention du travailleur sur une construction de logique imaginaire, elles diminuent l'intérêt qu'il porte aux études positives qui nous parlent de ce qui est, tandis que la logique par elle-même ne nous apporte que ce que l'on imagine. Ainsi, en dernière analyse, elles dépouillent la science économique de cette grande importance pratique qu'elle devrait avoir dans la société). [Je ne connais pas le livre du Prof. Pantaleoni ni aucun auteur italien. Pour ce qui est de la critique de la méthode mathématique, je puis dire, cependant, que l'expérience dans les autres sciences montre que « in face of many practical problems », il est très sage de « draw off thought » pour un temps sur la théorie pure. Avant de solutionner les problèmes de projectiles pour canons, il est bon de solutionner les problèmes de projectiles en général. Avant d'être apte à construire le pont de Brooklyn ou de se prononcer à son sujet après sa construction, un ingénieur doit étudier les mathématiques, la mécanique, la *théorie* de la tension et de la courbe naturelle d'un câble, etc., etc. De même aussi avant d'appliquer l'économie politique aux tarifs de chemins de fer, aux problèmes de trusts, à l'explication de certaines crises de cours, il est très bon de développer la *théorie* de l'économie politique en général. Lorsque ces « practical problems » particuliers sont envisagés, l'instrument mathématique est souvent, je crois, celui qui conduit aux meilleurs résultats.

Je suis loin de nier cependant que certains économistes mathématiciens aient fait montre d'une « false accuracy ». Cela est provenu de ce qu'ils ont fait des hypothèses particulières non pas afin de faciliter les recherches économiques, mais pour permettre des transformations algébriques. Un auteur qui fait intention-

nellement parade de ses mathématiques fait en réalité beaucoup de tort à la cause de l'économie mathématique. J'ose penser que la *Volkswirtschaftslehre* de Launhardt, qui contient d'excellentes choses, offrirait une meilleure exposition de ces excellentes choses si l'auteur s'était contenté de résoudre des problèmes dans toute leur généralité].

## § 9

Je ne puis m'empêcher d'avancer une opinion qui ne s'applique peut-être pas à tous les auteurs qui viennent d'être cités, mais qui s'applique certainement à beaucoup. Les mathématiques sont considérées comme un intrus par celles des personnes étudiant l'économie qui n'ont pas reçu une éducation mathématique leur permettant de les comprendre et d'en faire usage et qui ne veulent pas croire que d'autres puissent jouir d'un point de vue inaccessible pour elles. Un ami à moi s'intéressant vivement à l'économie me demandait qu'elle était l'utilité des mathématiques en la matière. En entendant ma réponse il dit : « Eh bien ! il ne me va pas d'admettre que je ne puisse comprendre l'économie aussi bien que ceux qui ont appris les hautes mathématiques ».

Ainsi une partie au moins de l'opposition rencontrée par la méthode mathématique est un simple incident dû à sa nouveauté. Il faut se souvenir que le caractère des économistes est lui-même une variable et que de génération en génération ceux-ci adoptent ou rejettent les travaux d'économie suivant le mode de l'époque. Il n'est peut-être pas téméraire d'espérer que les économistes théoriciens (en tant que distincts des historiens) de la prochaine génération se seront formés par une préparation mathématique à ce mode de traitement de leur matière, et que ce seront des hommes aptes, grâce à des dispositions naturelles, à acquérir cette formation.

## § 10

Le but de l'économiste c'est de *voir*, de peindre l'interjeu des éléments économiques. Plus ces éléments se détachent nettement à sa vue, mieux cela vaut ; plus il peut grouper d'éléments et en embrasser à la fois dans son esprit, mieux cela vaut. Le monde économique est une région ténébreuse. Les premiers explorateurs usèrent de leur vue seule. Les mathématiques sont la lanterne grâce à laquelle ce qui était précédemment peu visible apparaît maintenant avec des contours nets, précis. La vieille fantasmagorie disparaît. Nous voyons mieux. Nous voyons aussi plus loin.



## APPENDICE IV

### BIBLIOGRAPHIE DES ÉCRITS MATHÉMATICO-ÉCONOMIQUES



#### § I

Une bibliographie des écrits mathématico-économiques fut établie par Jevons et étendue (1) par sa veuve jusqu'à 1888. Cette liste contient un certain nombre d'œuvres mathématiques de son seul. J'ai choisi dans le total (196) les 50 qui sont ou bien incontestablement mathématiques ou bien étroitement associées logiquement ou historiquement à la méthode mathématique. Ainsi Menger, bien que ses écrits ne soient pas explicitement mathématiques, est compris dans ce choix parce qu'il fonda « l'École Autrichienne » qui depuis lors a toujours été alliée à la méthode mathématique. Dans cette liste choisie les références sont très abrégées et la première édition de chaque ouvrage est seule indiquée.

La seconde liste vise à compléter celle de Jevons jusqu'à ce jour. Je serai reconnaissant de l'indication d'inexactitudes ou d'omissions. Une étoile a été placée devant ceux de ces écrits dans lesquels la méthode mathématique n'a été employée qu'occasionnellement ou dont le caractère mathématique ne se manifeste pas par des symboles ou des graphiques. Pour les écrits italiens ou

(1) *Pol. Econ.*, Appendice I à la troisième édition, 1888.

danois, auxquels je suis entièrement étranger, et pour un grand nombre d'autres que j'en'ai pas été à même de voir et d'examiner, j'ai été guidé par des notices de livre ou par les termes du titre.

La liste figurant en appendice de l'ouvrage de Jevons et la seconde liste placée ici peuvent être regardées comme une bibliographie suffisamment complète des écrits mathématico économiques dans le sens le plus large, tandis que les écrits non étoilés de l'abrégé de la liste de Jevons inséré ici ainsi que les écrits non étoilés de la seconde liste représentent la littérature économique strictement et franchement mathématique. La différence entre ces deux classes est assez bien marquée.

**LISTE CHOISIE**  
**DANS LA BIBLIOGRAPHIE DE JEVONS**

1711. CEVA. — De re nummaria quoad fieri potuit geometrice tractata.
1765. BECCARIA. — Tentativo analitico sui contrabandi, etc.
1801. CANARD. — Principes d'économie politique.
1824. THOMPSON. — Instrument of Exchange.
1826. VON THÜNEN. — Der isolirte Staat, etc.
1829. WHEWELL. — Mathematical Exposition of some Doctrines of Pol. Econ.
1838. COURNOT. — Recherches sur les principes math. de la théorie des richesses.
1838. TOZER. — Math. Investigation of the Effect of Machinery, etc.
1840. ANONYMOUS. — On Currency.
1840. TOZER. — On the Effect of the Non-Residence of Landlords, etc.
1844. DUPUIT. — De la mesure de l'utilité des travaux publics.
1844. HAGEN. — Die Nothwendigkeit der Handelsfreiheit, etc.
1847. BORDAS. — De la mesure de l'utilité des travaux publics.
1849. DUPUIT. — De l'influence des péages sur l'utilité des voies de communication.
1850. LARDNER. — Railway Economy (chapter xiii).
1850. WHEWELL. — Mathematical Exposition of Certain Doctrines of Pol. Econ.
1854. GOSSEN. — Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs, etc.
1856. BENNER. — Théorie mathématique de l'économie politique.
1863. MANGOLDT. — Grundriss der Volkswirtschaftslehre.
- Fisher. — *Valeurs.*

1864. FAUVEAU. — Considérations math. sur la théorie de l'impôt.
1867. FAUVEAU. — Considérations math. sur la théorie de la valeur.
1870. JENKIN. — The Graphic Representation of the laws of Sup. and Demand, etc.
1871. JEVONS. — The Theory of Political Economy.
- 1871\*. MENGER. — Grundsätze der Volkswirtschaftslehre.
1872. LAUNHARDT. — Kommerzielle Trassirung der Verkehrswege.
1873. POCHET. — Géométrie des jeux de Bourse.
1874. WALRAS. — Principe d'une théorie math. de l'échange.
1874. WALRAS. — Eléments d'économie politique pure.
- 1874\*. LETORT. — De l'application des math. à l'étude de l'écon. pol.
- 1875\*. DARWIN. — The Theory of Exchange Value.
- 1875\*. BOCCARDO. — Dell'applicazione dei metodi quantitativi, etc.
1876. WALRAS. — Equations de l'échange, etc.
1876. WALRAS. — Equations de la capitalisation.
1876. WESTERGAARD. — Den moralske Formue og det moralske Haab.
- 1878\*. WEISZ. — Die mathematische Methode in der Nationalökonomie.
1879. WALRAS. — Théorie math. du billet de banque.
1881. EDGEWORTH. — Mathematical Psychics.
1881. WALRAS. — Théorie math. du bimétallisme.
1883. LAUNHARDT. — Wirtschaftliche Fragen des Eisenbahnwesens.
- 1884\*. WIESER. — Hauptgesetze des wirtschaftlichen Werthes.
1885. LAUNHARDT. — Math. Begründung der Volkswirtschaftslehre.
1886. GROSSMAN. — Die Math. im Dienste der Nationalökonomie.  
I Lieferung.
- 1886\*. NEWCOMB. — Principles of Political Economy.
- 1886\*. BÖHM BAWERK. — Theorie des wirtschaftlichen Güterwerts.
1886. ANTONELLI. — Teoria math. della economica politica.
1886. GROSSMAN. — Die Math. im Dienste der Nationalökonomie.  
II Lieferung.
1887. VAN DORSTEN. — Math. onderzoekingen op het gebied Staatshuishoudkunde.
1887. WESTERGAARD. — Math. i Nationalökonomiens Tjeneste.
1887. PANTALEONI. — Teoria della pressione tributaria, etc.
1888. WICKSTEE. — The Alphabet of Economic Science.

## § 3

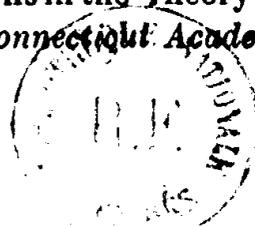
## EXTENSION DE LA BIBLIOGRAPHIE DE JEVONS

1867. WITTSTEIN. — Mathem. Statistik. *Hanover*.
1882. PANTALEONI (M.). — La traslazione dei tributi. *Rome : Paolini*.
1884. SCHROEDER (E.-A.). — Das Unternehmen und der Unternehmerrergewinn vom historischen, theoretischen und praktischen Standpunkte. *Wien*. 92 pp.
- 1884\*. SAX (E.). — Das Wesen und die Aufgabe der Nationalökonomie.
- 1887\*. SAX (E.). — Grundlegung der theoretischen Staatswirtschaft.
1887. PICARD (A.). — *Traité des chemins de fer*. 4 vols. *Paris : Rothschild*.
1888. EDGEWORTH (F.-Y.). — New method of measuring variations in general prices. *Jour. Stat. Soc. London*, p. 347.
- 1888\*. SAX (E.). — Die neusten Fortschritte der nationalökonomischen Theorie. Vortrag gehalten in Dresden März. *Leipzig : Duncker et Humblot*. 8 vo. 38 pp.
- 1888\*. MENGER (C.). — Contribution à la théorie du capital. [Trad. du Jahrb. für Nat. Oek., par C. Secrétan] *Rev. d'Econ. Pol.*, Déc. 88.
- 1888\*. SALERNO (Ricca). — *Manuale di Scienza delle Finanze*. *Florence : Barbera*.
1888. HADLEY (A.-T.). — *Railroad Transportation, its History and its Laws*. *New-York and London*, 269 p. [Appendice II].
1888. GOSSEN (H.-H.). — *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs*. [Nouv. édition.] *Berlin : Prager*. 8 vo. 286 pp.
- 1888\*. MENGER (C.). — Zur Theorie des Kapitals. *Jahrb. Nat. Oek.* 17, Heft. 1.
1889. PANTALEONI (M.). — *Principii di Economia Pura*. *Florence : Barbera*.
1889. AUSPITZ UND LIEBEN. — *Untersuchungen über die Theorie des Preises*. *Leipzig : Duncker et Humblot*. 555 pp.
- 1889\*. ZUCKERKANDL (R.). — Zur Theorie des Preises mit besonderer Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung der Lehre. *Leipzig*. 348 p.p.
- 1889\*. WIESER (F. von). — *Der natürliche Werth*. *Wien*. 237 pp.

- 1889\*. BÖHM-BAWERK (E.). — Kapital und Kapitalzins. Translated into English by Wm. Smart. 1890. *London and New-York: Macmillan.*
- 1889\*. LEHR (J.). — Wert, Grenzwert, und Preise. *Jahrb. Nat. Oek.* 19 Heft 1.
1889. SUPINO (C.). — La Teoria del Valore e la Legge del minimo mezzo. *Giorn. degli Econ.*, Août 89.
1889. WALRAS (L.). — Théorème de l'Utilité maxima des Capitaux neufs. *Rev. d'Econ. Polit.*, Juin 89.
- 1889\*. MACLEOD (H.-D.), — The Theory of Credit. Vol. I. *London: Longmans & Co.* 8 vo. 342 pp.
1889. SAINT-MARC (H.) Les Procédés d'Analyse Graphique à l'Exposition Universelle. *Rev. d'Econ. Polit.*, Août 89.
1889. VIRGILII (F.). — La Statistica Storica e Mathematica. *Giorn. degli Econ.*, Août 89, terminé Oct. 89.
- 1889\*. HEARN (W.-E.). — Plutology; or, The Theory of the Efforts to satisfy Human Wants. [Nouv. édition]. *Melbourne: Robertson* 8 vo. 486 pp.
- 1889\*. KOMORZYNSKI (J.). — Der Werth in der isolirten Wirthschaft. *Wien: Manz.* 8 vo., 105 pp.
1889. ROSSI (G.). — La Mathematica applicata alla Teoria della Ricchezza Sociale: *Studi Bibliografici, Storici, e Critici. Vol. I, fasc. 1. Reggio Emilia: Artegianelli* 8 vo. 124 pp., 4 planches.
- 1889\*. BÖHM-BAWERK (E. von). — Une nouvelle Théorie sur le Capital. *Rev. d'Econ. Pol.*, Avril 1889.
- 1889\*. BÖHM-BAWERK (E. von). — Kapital und Kapitalzins. Zweite Abteilung; Positive Theorie des Kapitals. *Innsbrück.* 8 vo.
- 1889\*. CLARK (J.-B.). — Possibility of a Scientific Law of Wages. [Publ. of Am. Econ. Assoc.] *Baltimore.* 8 vo. 32 pp.
1889. WICKSTEED (P.-H.). — On certain Passages in Jevons' « Theory of Political Economy ». *Quart. Jour. Econ.*, Avril, 89, p. 293.
1889. EDGEWORTH (F.-Y.). — On the application of Mathematics to Pol. Econ. *Jour. Stat. Soc. London*, Dec. 89.
- 1890\*. DIETZEL. — Die klassische Werttheorie und die Theorie vom Grenznutzen. *Conrad's Jahrbuch N. F. Band 20.* pp. 561-606.
- 1890\*. MACLEOD (H.-D.). — The Theory of Credit. vol. II, part 1. *London: Longmans.* 8 vo.
1890. MARSHALL (A.). — Principles of Economics, vol. 1, 1<sup>re</sup> éd. *London: Macmillan.* 770 pp. [Notes au bas des pages et Appendice mathématiques.]
1890. PANTALEONI (M.). — Principii di Economia pura. *Florence: Barbera.* 16 mo. 376 pp.

1890. JURISCH (K.-W.). — Mathematische Diskussion des Entwicklungsgesetzes der Werterzeugung durch industrielle Produktionsgruppen. *Viertelj. f. Volksw.* 27 Band 3, 1. Second mémoire, même titre, 27 Band 3, 2.
1890. VAUTHIER (L.-L.). — Quelques Considérations Élémentaires sur les Constructions Graphiques et leur Emploi en Statistique. *Journ. de la Soc. Statist.*, Juin 90.
- 1890\*. AUSPITZ (R.). — Die klassische Werttheorie und die Lehre vom Grenznutzen. *Jahrb. Nat., Oek.* 21 Heft 3; Réponse à Dietzel, même journal, 20 Heft 6.
- 1890\*. ZUCKERKANDLE (R.). — Die klassische Werttheorie und die Theorie vom Grenznutzen. *Jahrb. Nat. Oek.* 21 Heft. 5. Réponse à Dietzel.
1890. COLSON (G.). — Transports et tarifs. Précis du régime, Lois économiques de la détermination des prix de transport, Tarifs de chemins de fer, etc., *Paris: Rothschild*, 8 vo., 479 pp.
1890. LAUNHARDT (W.). — Theorie der Tarifbildung der Eisenbahnen. *Berlin: Springer*, 8 vo. 8½ pp.
1890. WESTERGAARD (H.). — Die Grundzüge der Theorie der Statistik. *Jena: Fischer*, 8 vo. 286 pp.
1890. COSSA (L.). — Le Forme Naturali della Economia Sociale. *Milan: Hoepli*.
1890. MARSHALL (A.). — Principles of Economics. Vol. I, 2<sup>m</sup> éd. *London: Macmillan*. 770 pp. [Notes au bas des pages et Appendice mathématiques.]
- 1891\*. HOBSON (J.-A.). — The law of the three rents. *Quart. Jour. Econ.*, Avril 1891, p. 263.
- 1891\*. CLARK (J.-B.). — Distribution determined by a law of rent. *Quart. Jour. Econ.*, Avril 1891, p. 289.
1891. EDGEWORTH (F.-Y.). — Osservazioni sulla Teoria matematica dell'Economia Politica con riguardo speciale ai Principii di Economia di Alfredo Marshalli. *Giorn. degli Econ.*, Mars 91.
- 1891\*. SMART (W.). — An Introduction to the Theory of Value on the lines of Menger, Wieser and Böhm-Bawerk. *London and New-York: Macmillan*. 16 mo. 88 pp.
- 1891\*. CLARK (J.-B.). — The statics and the dynamics of Distribution. *Quart. Jour. Econ.*, Oct. 91, p. 111.
- 1891\*. WIESER (F.). — The Austrian School and the Theory of Value. *Economic Journal*, Mars 91.
- 1891\*. BÖHM-BAWERK (E. von). — The Austrian Economist. *Annals of Am. Acad. of Polit. Sci.*, Janv. 91.

1891. EDGEWORTH (F.-Y.). — La Théorie mathématique de l'Offre et de la Demande et le Coût de production. *Rev. d'Econ. Polit.*, Janv. 91.
- 1892\*. BÖHM-BAWERK (E. von). — Wert, Kosten und Grenznutzen. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Dritte Folge, Dritter Band, Drittes Heft*, pp. 321-378.
1892. BILGRAM (H.). — Comments on the « Positive Theory of Capital » [de Böhm-Bawerk]. *Quart. Jour. Econ. Jan.*, 92, pp. 190-206.
1892. GROSSMAN (L.). — Die Mathematik in Dienste der Nationalökonomie unter Berücksichtigung auf die praktische Handhabung der Finanzwissenschaft und der Versicherungstechnik [schluss Lieferung]. Vienne.
- 1892\*. WIESER (F. von). — The Theory of value. A reply to Prof. Macvane. *Annals of Am. Acad. of Pol. and Soc. Sci.*, Mars 92.
- 1892\*. SELIGMAN (E.-R.-A.). — On the Shifting and Incidence of Taxation. *Publ. of Amer. Econ. Asso.*, Vol. VII. Nos. 2 and 3.
- 1892\*. PATTEN (S.-N.). — The Theory of Dynamic Economics. *Publ. of Univ. of Penn., Pol. Econ. and Public Law Series*, Vol. III, No. 2. Phila. 8 vo. 153 pp.
- 1892\*. BÖHM-BAWERK (E. von). — Wert, Kosten, und Grenznutzen. *Jahrb. Nat. Oek.*, 3, Heft 3.
1892. CUNYNGHAME (H.). — Geometrical methods of treating Exchange-value, Monopoly, and Rent. *Econ. Journ.*, Mars 92.
1892. PARETO (V.). — Considerazione sui Concetti Fondamentali dell'Economia Politica Pura. *Giorn. degli Econ.*, Mai 92.
1892. PARETO (V.). — La Teoria dei Prezzi dei Signori Auspitz et Lieben e le Osservazioni del Professore Walras. *Giorn. degli Econ.* Mars 92.
- 1892\*. VOIGT (A.). — Der ökonomische Wert der Güter. *Zeitschr. f. Ges. Staatsw.*, 48, Heft 2.
1892. WALRAS (L.). — Geometrical Theory of the Determination of Prices. *Annals Amer. Acad. Polit. and Social Sci.*, Phila. Juil. 92. Traduit sous la surveillance de Irving Fisher. La Partie I fut publiée en français dans le *Bulletin de la Soc. des Ing. Civ. de Paris. Janv. 1891*, et les Parties II et III dans le *Recueil inaugural de l'Univ. de Lausanne, 1892*.
1892. FISHER (I.). — Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices. *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. Vol. IX, pp. 1-124.



## TABLE DES MATIÈRES



PRÉFACE DE L'AUTEUR A L'ÉDITION FRANÇAISE . . . . .	1
PRÉFACE . . . . .	3
<b>PARTIE I. — L'UTILITÉ DE CHAQUE BIEN CONSIDÉRÉE COMME NE DÉPENDANT QUE DE LA QUANTITÉ DE CE BIEN . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>CHAPITRE I. — <i>L'utilité en tant que quantité</i> . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. — Postulat psycho-économique . . . . .	9
§ 2. — Définitions d'utilités égales et inégales . . . . .	11
§ 3. — Application de ces définitions à une question d'échange . . . . .	12
§ 4. — Définition du rapport de deux utilités . . . . .	14
§ 5. — Analogie avec les autres définitions mathéma- tiques . . . . .	18
§ 6. — Utilité marginale, unité d'utilité . . . . .	19
§ 7. — Signification exacte d'une courbe d'utilité . . . . .	20
§ 8. — Utilité totale, valeur-utilité, bénéfice ou rente du consommateur . . . . .	21
§ 9. — L'élément temps . . . . .	23
§ 10. — Courbes d'utilité correspondant à une période et à un instant . . . . .	24
§ 11. — Une courbe d'utilité annuelle n'implique pas la connaissance exacte des quantités con- sommées . . . . .	25
§ 12. — La théorie des probabilités élimine partielle- ment les influences sporadiques excepté en	

ce qui concerne le « bénéfice » . . . . .	25
§ 13. — Les quantités infinitésimales conviennent bien qu'elles n'existent pas. . . . .	27
§ 14. — Les définitions présentes de l'utilité dégagent l'économiste des discussions psychologiques et métaphysiques . . . . .	28
§ 15. — Résumé du Chapitre I . . . . .	29
<b>CHAPITRE II. — Mécanisme . . . . .</b>	<b>31</b>
§ 1. — Fréquence de l'analogie avec la mécanique dans les conceptions économiques . . . . .	31
§ 2. — Hypothèses idéales au sujet du marché . . . . .	32
§ 3. — Un nouveau graphique d'utilité. La citerne correspondante (Fig. 2) . . . . .	33
§ 4. — Un seul bien et un seul consommateur . . . . .	34
§ 5. — Un bien — un producteur ; graphique et citerne de désutilité (Fig. 3) . . . . .	35
§ 6. — Un bien — plusieurs consommateurs (Fig. 4) . . . . .	37
§ 7. — Interprétation analytique du § 6 . . . . .	39
§ 8. — Totalité du bien. . . . .	40
§ 9. — Un bien — plusieurs producteurs (Fig. 5) . . . . .	41
§ 10. — Ce qui précède vient simplement préciser une image couramment évoquée. . . . .	41
<b>CHAPITRE III. — Un consommateur (ou un producteur) — plu- sieurs biens . . . . .</b>	<b>43</b>
§ 1. — Répartition du revenu. . . . .	43
§ 2. — Mécanisme (Fig. 6). . . . .	44
§ 3. — Les trois conditions déterminantes d'un tel équilibre . . . . .	45
§ 4. — Interprétation analytique du § 3 . . . . .	46
§ 5. — Totalité du revenu . . . . .	47
§ 6. — Un producteur — plusieurs biens (Fig. 7) . . . . .	48
<b>CHAPITRE IV. — <math>m</math> biens — <math>n</math> consommateurs (ou producteurs) . . . . .</b>	<b>50</b>
§ 1. — Relativité des points de vue des Chapitres II, III et IV. . . . .	50
§ 2. — Comparaison rigoureuse et analytique de ces points de vue. . . . .	51

§ 3. — L'égalité des utilités marginales fait maintenant place à leur proportionnalité . . . . .	52
§ 4. — Mécanisme (Fig. 8, 9, 10, 11) . . . . .	58
§ 5. — Equilibre automatique . . . . .	59
§ 6. — Les diverses grandeurs représentées. . . . .	60
§ 7. — Deux relations simples entre ces grandeurs . . . . .	63
§ 8. — Esquisse de l'interdépendance complexe . . . . .	64
1. Revenus égaux . . . . .	64
2. Accroissement d'un revenu . . . . .	64
3. Accroissement d'un revenu, diminution d'un autre. . . . .	66
4. Accroissement de la quantité d'un bien. . . . .	70
5. Accroissement de la quantité d'un bien avec accroissement consécutif de revenu . . . . .	72
6. Accroissement des quantités de tous les biens. . . . .	73
7. Diminution de tous les revenus. . . . .	74
8. Modification des caractéristiques individuelles. . . . .	75
§ 9. — Impossibilité d'établir des citernes totalisantes. . . . .	77
§ 10. — Interprétation analytique . . . . .	77
§ 11. — $m$ biens — $n$ producteurs (Fig. 12, 13) . . . . .	79
 CHAPITRE V. — <i>Combinaison de la production et de la consommation</i> . . . . .	 80
§ 1. — L'interdépendance de la production et de la consommation ne doit pas être laissée de côté . . . . .	80
§ 2. — Hypothèses . . . . .	81
§ 3. — Cas d'un individu consommant exactement la quantité d'un bien donné qu'il produit lui-même (Fig. 14) . . . . .	82
§ 4. — Interprétation analytique. . . . .	83
§ 5. — $n$ individus — $m$ biens (Fig. 15 et 16) . . . . .	84
§ 6. — Interprétation analytique. . . . .	86
 CHAPITRE VI. — <i>Les opérations composantes de la production.</i> . . . .	 89
§ 1. — Vente au détail (Fig. 17). . . . .	89
§ 2. — Interprétation analytique. . . . .	91
§ 3. — Autres subdivisions de la production. . . . .	93

<b>PARTIE II. — L'UTILITÉ D'UN BIEN FONCTION DES QUANTITÉS DE TOUS LES BIENS. . . . .</b>	<b>95</b>
<b>CHAPITRE I. — Deux biens à utilités solidaires. . . . .</b>	<b>95</b>
§ 1. — Introduction . . . . .	95
§ 2. — Fréquence de l'interdépendance des utilités . . . . .	9
§ 3. — Conséquence au point de vue de l'étude à l'aide des citernes . . . . .	97
§ 4. — Définition des biens concurrents et des biens complémentaires. . . . .	98
§ 5. — L'étude à l'aide des citernes est correcte mais incomplète. . . . .	100
§ 6. — La troisième définition de l'utilité (Partie I, Ch. I) . . . . .	101
§ 7. — Cas de deux biens . . . . .	101
§ 8. — Combinaisons impossibles de deux biens . . . . .	104
§ 9. — Courbes d'utilité. . . . .	104
§ 10. — Courbes d'indifférence . . . . .	105
§ 11. — Ligne de revenu partiel tangente à une courbe d'indifférence . . . . .	108
§ 12. — Différences de sensibilité des biens concurrents et des biens complémentaires . . . . .	110
§ 13. — Qualité supérieure et qualité ordinaire d'un même bien . . . . .	111
§ 14. — Les « directions maxima » . . . . .	112
§ 15. — Parallélisme des « directions maxima » rela- tives à tous les consommateurs. . . . .	114
§ 16. — Production . . . . .	114
§ 17. — Production et consommation . . . . .	116
<b>CHAPITRE II. — Trois biens ou plus . . . . .</b>	<b>117</b>
§ 1. — Construction à trois dimensions . . . . .	117
§ 2. — Complication de la dépendance d'utilités . . . . .	118
§ 3. — Equilibre dans le cas où il n'y a que trois biens. . . . .	119
§ 4. — Retour à deux dimensions par des sections planes . . . . .	121
§ 5. — Nécessité de $m$ dimensions . . . . .	121
§ 6. — Emploi de $m$ dimensions . . . . .	122
§ 7. — Conditions d'équilibre. . . . .	123

§ 8. — Retour à un nombre moindre de dimensions par sections « plates » . . . . .	124
§ 9. — Interprétation analytique (analyse vectorielle).	124
§ 10. — Cas particuliers d'utilité marginale . . . . .	126
<b>CHAPITRE III. — Analogies mécaniques . . . . .</b>	<b>131</b>
§ 1. — Etude des analogies mécaniques . . . . .	131
§ 2. — Analogies présentées en colonnes parallèles .	132
<b>CHAPITRE IV. — L'utilité en tant que quantité . . . . .</b>	<b>134</b>
§ 1. — Absence de nécessité de comparer des utilités recueillies par deux personnes . . . . .	134
§ 2. — Comment on peut faire cette comparaison . .	134
§ 3. — Comment on pourrait appliquer cela à la sta- tistique . . . . .	135
§ 4. — Superfluité de la définition (3) (Part. I. Chap. I) dans la Part. II . . . . .	136
§ 5. — Les « directions maxima » ont seules de l'im- portance . . . . .	137
§ 6. — Probabilité de l'impossibilité d'intégrer l'utilité totale pour les utilités solidaires . . . . .	138
§ 7. — Superfluité des constantes arbitraires . . . .	138
§ 8. — Superfluité dans les présentes recherches de quatre attributs de l'utilité . . . . .	139
<b>APPENDICE I. — REMARQUES DIVERSES SUR LA PARTIE I. . . .</b>	<b>141</b>
<b>I. — Manquement d'équations . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>II. — Comparaison des citernes et des graphiques de la Partie I avec les graphiques de Jevons et d'Auspitz et Lieben .</b>	<b>144</b>
§ 1. — Modes de représentation géométrique possibles d'un bien et de son utilité . . . . .	144
§ 2. — Tableau de comparaison des coordonnées cor- respondant aux citernes avec celles em- ployées par Jevons et Auspitz et Lieben . .	144
§ 3. — Une hypothèse linéaire . . . . .	146
§ 4. — Mérites relatifs des graphiques. . . . .	147
§ 5. — Propriétés fondamentales des citernes . . . .	148
§ 6. — Ce que représente l'abscisse. . . . .	148
§ 7. — Utilité totale et bénéfice . . . . .	149

III. — <i>Maximum de bénéfice</i> . . . . .	152
§ 1. — Par rapport à un individu . . . . .	152
§ 2. — Par rapport à un bien et sens dans lequel il faut l'entendre . . . . .	158
§ 3. — Par rapport à l'ensemble du marché et sens dans lequel il faut l'entendre . . . . .	158
§ 4. — Sous quelles conditions le bénéfice pour l'ensemble du marché serait maximum si nous pouvions obtenir la « véritable » équivalence des utilités recueillies par deux personnes . . . . .	154
IV. — <i>Elimination des variables</i> . . . . .	156
Chaque prix est le quotient de deux déterminants, et toutes les équations peuvent être réduites à un seul groupe ne comprenant que les quantités de biens . . . . .	156
APPENDICE II. — CAUSES RESTRICTIVES DE L'ANALYSE PRÉCÉDENTE . . . . .	158
§ 1. — Les hypothèses seraient idéales. . . . .	158
§ 2. — L'utilité fonction de nombre de variables . . . . .	159
§ 3. — Articles non homogènes et non divisibles à l'infini . . . . .	160
§ 4. — Intermittence . . . . .	160
§ 5. — Statique et Dynamique . . . . .	161
§ 6. — Population . . . . .	162
§ 7. — Pas d'individu parfait libre de suspendre en tout point sa production (ou sa consommation). . . . .	163
§ 8. — Pas de connaissance parfaite des prix . . . . .	163
§ 9. — La production diffère de la consommation sous beaucoup de rapports importants . . . . .	163
§ 10. — L'utilité et la désutilité marginales peuvent en certains cas varier en sens opposé de ce qui a été admis . . . . .	164
§ 11. — Les marchés ne sont pas isolés et il n'y a pas de marché parfait . . . . .	165
APPENDICE III. — UTILITÉ ET HISTOIRE DE LA MÉTHODE MATHÉMATIQUE EN ÉCONOMIQUE . . . . .	166
§ 1. — Son utilité de la même nature que celle de la méthode mathématique en général . . . . .	166

§ 2. — Distinction entre la méthode mathématique et les mathématiques . . . . .	167
§ 3. — L'utilité de la méthode mathématique dépend de celui qui l'emploie . . . . .	168
§ 4. — La méthode mathématique est pour la haute économique . . . . .	169
§ 5. — La méthode mathématique s'est-elle définitivement établie? . . . . .	170
§ 6. — Qu'est-ce qui est déjà réalisé? . . . . .	172
§ 7. — Citations favorables à la méthode mathématique de Whewell, Cournot, Gossen, Jevons, Walras, Newcomb, Launhardt, Wicksteed, Foxwell, Auspitz et Lieben, Edgeworth, Marshall et Cunyngame . . . . .	174
§ 8. — Citations défavorables à la méthode mathématique de Anonyme, Cairnes, Wagner, Ingram et Rabbeno, avec commentaires. . . . .	183
§ 9. — Un motif d'opposition . . . . .	189
§ 10. — Conclusion . . . . .	190
APPENDICE IV. — BIBLIOGRAPHIE D'ÉCRITS MATHÉMATICO-ÉCONOMIQUES. . . . .	191
§ 1. — Esprit de la bibliographie . . . . .	191
§ 2. — Liste choisie dans la bibliographie de Jevons . . . . .	193
§ 3. — Extension de la bibliographie de Jevons. . . . .	195

